iv) Puesto que $W \neq \emptyset$, entonces W no es numerable. Ya que A sí lo es, concluimos que $W \setminus A \neq \emptyset$. Sea $w \in W \setminus A$. De acuerdo con (**??**), se cumple que $D_{2r(w)}(w) \subseteq W \setminus A$. Esto prueba que $W \setminus A$ es abierto.

Por último, veamos que $W \setminus A$ es conexo. Para ello fijemos $z \in W \setminus A$. Mostraremos que z se puede unir con cualquier $w \in W \setminus A$ mediante una curva en $W \setminus A$. Con este propósito consideremos el conjunto V formado por todos aquellos $w \in W$ para los cuales existe una curva $\alpha : [c,d] \to W$ que une z con w y tal que $\alpha(t) \in W \setminus A, \ \forall\, t \in (c,d)$.

Para mostrar que $z \in V$ definamos $\alpha(t) = z, \ \forall\, t \in [0,1]$. Entonces α es una curva que une z con Z y $\alpha(t) = z \in W \setminus A$. En consecuencia $z \in V$.

Sea $w \in V$. Consideremos primero $w \in W \setminus A$. Usando que $D_{2r(w)} \subseteq W \setminus A$, se obtiene que $D_{2r(w)(w)} \subseteq V$. Consideremos después $w = z$. Empleando que $D'_2 r(z)(z) \subseteq W \setminus A$, se sigue que $D_{2r(z)}(z) \subseteq V$. Consideremos finalmente $w \in A, w \neq z$. Sea $y \in D'_{2r(w)}(w)$. Tomemos una curva $\alpha : [c,d] \to W \setminus A$ que una z con w. Usando la continuidad de α fijemos un punto $t_0 \in [c,d]$ tal que $0 < |w - \alpha(t_0)| < 2r(w)$. Ya que $\alpha(t_0), y \in D'_{2r(w)}(w)$, Podemos ahora construir una curva β que una $\alpha(t_0)$ con y y cuya trayectoria esté contenida en $D'_{2r(w)}(w)$. La curva $\alpha \dot{+} \beta$ es entonces una curva en $W \setminus A$ que une z con y. Esto prueba que V es abierto.

Consideremos finalmente una sucesión $\{v_n\} \subseteq V$ y $w \in W$ y tales que $v_n \to w$. Elijamos después $N \in \mathbb{N}$ tal que $v_N \in D_{2r(w)}(w)$. Si $v_N = w$, la conclusión es clara. De lo contrario, $v_N \in W \setminus A$ y ya que $D_{2r(w)}(w) \subseteq W \setminus A$, se sigue que $w \in V$. Esto prueba que V es cerrado en W.

En el desarrollo anterior hemos probado V es no vacío, abierto y cerrado en W. La conexidad de W implica entonces que $V = W$. De aquí se sigue que cualquier par de puntos en $W \setminus A$ se pueden unir mediante una curva contenida en $W \setminus A$. $\square$

Observación 1. Tomando $A = \emptyset$, resulta que $A^a \cap W = \emptyset$. De la prueba de iv) en el teorema anterior resulta entonces que

si $W \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo, entonces W es arco-conexo.

A partir del teorema 1 y el lema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1. Sean W una región y $f : W \to \mathbb{C}$ una función localmente serie de potencias. Si $f \neq 0$, entonces:

i) $f^{-1}(0)$ es numerable.

ii) Si $K \subseteq W$ es compacto, entonces $f^{-1}(0) \cap K$ es finito.

Observación 2. Bajo las hipótesis de la proposición anterior, consideremos $c \in \mathbb{C}$. Entonces, aplicando dicho resultado a $g := f - c$ resulta que la ecuación

$$f(z) = c,$$

tiene un número finito (que puede ser 0) de soluciones en cada compacto $K \subseteq W$.

Principio del Módulo Máximo

Teorema 1. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f : W \to \mathbb{C}$ una función que es localmente una serie de potencias y $a \in W$.

i) **(Principio del módulo máximo)** Si f no es constante, entonces para cada $r > 0$ existe $z \in W \cap D_r(a)$ tal que $|f(z)| > |f(a)|$.

ii) Si f no es constante y $f(a) \neq 0$, entonces para cada $r > 0$ existe $z \in W \cap D_r(a)$ tal que $|f(z)| < |f(a)|$.

Demostración Empecemos notando que este resultado es similar al lema 3.3.3, el cual nos sirvió de base para establecer el teorema fundamental del álgebra. La prueba ahora consiste en establecer que dicho lema también se puede aplicar en este caso.

Dado $r > 0$ elijamos $s > 0$ tal que $0 < s < r$, $D_s(a) \subseteq W$ y f se pueda expresar como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Consideremos $h = f - f(a) = f - c_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Puesto que h no es la función cero en la región $D_s(a)$, resulta que $c_n \neq 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea m el menor de tales n. Entonces $c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ y $c_m \neq 0$. Luego, para $z \in D_r(a)$ se cumple

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m g(z), \tag{1}$$

donde $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n$. Por el corolario 3.1, la función g es continua en $D_r(a)$ y $g(a) = c_m \neq 0$. Esto, junto, con 1 permite aplicar el lema 3.3.3 y así obtener tanto i) como ii). $\square$

Corolario 2. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f : W \to \mathbb{C}$ l. s. p. y $K \subseteq W$ un conjunto compacto no-vacío.

i) Entonces $\sup\{|f(z)| : z \in K\}$ se alcanza en $\mathrm{Fr}K$.

ii) Si $f^{-1}(0) \cap K^0 = \emptyset$, entonces $\inf\{|f(z)| : z \in K\}$ se alcanza en $\mathrm{Fr}K$.

Capítulo 6

Integral de Cauchy

6.1. Integración de curvas

Definición 1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$ y $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces las funciones $\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Im}\alpha : [a.b] \to \mathbb{R}$ son continuas y por lo tanto son Riemann-integrables. Definimos entonces

$$\int_a^b \alpha(t) \ := \ \int_a^b \operatorname{Re}\alpha(t)dt + i\int_a^b \operatorname{Im}\alpha(t)dt.$$

Como es usual, si $a > b$ y α es continua en $[b, a]$, será conveniente definir también

$$\int_a^b \alpha(t)dt \ := \ -\int_b^a \alpha(t)dt.$$

Notación
1) Para aligerar la notación, en lugar de '$\int_a^b \alpha(t)dt$ ' con frecuencia simplemente emplearemos '$\int_a^b \alpha$ '.

2) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$. En ocasiones, en lugar de '$\int_a^b \alpha$' indicaremos '$\int_I \alpha$', siendo $I = [a, b]$. Asímismo, $\ell(I)$ denotará la longitud del intervalo I, esto es, $\ell(I) = b - a$.

3) Al considerar un intervalo $I = [a, b]$ entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$.

Ejemplo 1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_a^b c \ = \int_a^b \operatorname{Re} c + i\int_a^b \operatorname{Im} c \ = \ (b-a)\operatorname{Re} c + i(b-a)\operatorname{Im} c \ = \ (b-a)c.$$

A continuación presentamos las propiedades básicas de la integral de una curva. Recordemos antes que $C(I,\mathbb{C})$ es el espacio formado por las funciones $f : I \to \mathbb{C}$ que son continuas.

Teorema 1. Sean $I = [a,b]$ y $\alpha,\ \beta \in C(I,\mathbb{C})$.
i) La integral es lineal sobre $\mathbb{C}$, esto es

$$\int_I (\alpha(t)+\beta(t))dt = \int_I \alpha(t)dt + \int_I \beta(t)dt, \tag{1}$$

$$\int_I k\alpha(t)dt = k\int_I \alpha(t)dt,\ \forall\, k \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Nombraremos *aditividad* a la propiedad (1).

ii) La integral es *aditiva respecto al dominio de integración*. Esto significa que si $c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b \alpha(t)dt = \int_a^c \alpha(t)dt + \int_c^b \alpha(t)dt.$$

iii) Se cumple la *desigualdad del triángulo*, es decir

$$\left|\int_I \alpha(t)dt\right| \leq \int_I |\alpha(t)|dt.$$

Demostración i) La aditividad de la integral es consecuencia directa de la aditividad de la integral de Riemann para funciones reales. A continuación probaremos (2).

Tomemos $u = \operatorname{Re}\alpha$, $v = \operatorname{Im}\alpha$, $c = \operatorname{Re}k$, $d = \operatorname{Im}k$. Entonces $k\alpha = (c+id)(u+iv) = cu - dv + i(cv+du)$. Luego, por la definición de la integral y por la linealidad de la integral de Riemann, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_I k\alpha &= \int_I (cu-dv) + i\int_I (cv+du)) \\ &= c\int_I u - d\int_I v + i\left(c\int_I v + d\int_I u\right) \\ &= c\left(\int_I u + i\int_I v\right) + di\left(\int_I u + i\int_I v\right) = k\int_I \alpha. \end{aligned}$$

ii) La aditividad respecto al dominio de integración también es consecuencia directa de la propiedad correspondiente para funciones integrables reales.

iii) Usando la representación polar de $\int_I \alpha \in \mathbb{C}$ encontramos $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\int_I \alpha\right| = e^{i\theta} \int_I \alpha$. Empleando enseguida la $\mathbb{C}$-linealidad de la integral obtenemos $\left|\int_I \alpha\right| = \int_I e^{i\theta}\alpha$. Luego $\left|\int_I \alpha\right| = \mathrm{Re}\left|\int_I \alpha\right| = \int_I \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\alpha)$.

Aplicando ahora la desigualdad del triángulo a la función real $\mathrm{Re}\, e^{i\theta}\alpha$ y notando que $|\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\alpha)| \leq |e^{i\theta}\alpha| = |\alpha|$, llegamos a que

$$\left|\int_I \alpha\right| \leq \int_I |\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\alpha)| \leq \int_I |\alpha|. \quad \square$$

Notas
Clase 25, mayo 4, 2022
Fernando Galaz Fontes