Mostraremos enseguida que, como en el caso de funciones reales de variable real, para integrar una curva es suficiente encontrar una primitiva.

Definición 2. Una *primitiva* de una función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una función derivable $\beta : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $\beta' = \alpha$ en $[a,b]$.

Teorema 2. [Tma. fundamental del cálculo para curvas] Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ una función continua. Si β es una primitiva de α, entonces

$$\int_a^b \alpha(t)dt = \beta(b) - \beta(a).$$

Demostración Ya que β es una función derivable, usando el criterio por componentes para la derivación resulta

$$(\operatorname{Re}\beta)' + (\operatorname{Im}\beta)' = \beta' = \alpha = \operatorname{Re}\alpha + i\operatorname{Im}\alpha.$$

Esto indica que $\operatorname{Re}\beta$ es una primitiva de $\operatorname{Re}\alpha$ y $\operatorname{Im}\beta$ es primitiva de $\operatorname{Im}\alpha$. Por el teorema fundamental del cálculo para funciones reales, esto implica

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha &= \int_a^b \operatorname{Re}\alpha + i\int_a^b \operatorname{Im}\alpha \\ &= \operatorname{Re}\beta(b) - \operatorname{Re}\beta(a) + i(\operatorname{Im}\beta(b) - \operatorname{Im}\beta(a)) = \beta(b) - \beta(a). \quad \square\end{aligned}$$

Definición 3. Sea I un intervalo. Diremos que $\beta : I \to \mathbb{C}$ es de *clase* C^1, si β es derivable y $\beta' : I \to \mathbb{C}$ es continua.

Teorema 3. [Teorema de cambio de variable] Sean $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c < d$ y $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Si I es un intervalo compacto, $\alpha \in C(I,\mathbb{C})$, y $h([c,d]) \subseteq I$, entonces

$$\int_c^d \alpha(h(s))h'(s)ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \alpha(t)dt. \tag{1}$$

Demostración Para empezar observemos que $h([c,d])$ es un intervalo compacto. Consideremos primero el caso en que $h([c,d])$ se reduce a un sólo punto. Entonces h es constante en el intervalo $[c,d]$, por lo cual $h' = 0$. Ambas integrales en (1) son entonces 0.

Supongamos ahora que el intervalo $h([c,d])$ no se reduce a un punto. Introduzcamos las funciones

$$\beta(x) = \int_{h(c)}^x \alpha = \int_{h(c)}^x \operatorname{Re}\alpha + i\int_{h(c)}^x \operatorname{Im}\alpha, \ \forall\, x \in I,$$

y

$$\gamma(s) = (\beta \circ h)(s) = \int_{h(c)}^{h(s)} \operatorname{Re}\alpha + i \int_{h(c)}^{h(s)} \operatorname{Im}\alpha, \ \forall\, s \in [c,d].$$

Entonces, a partir de la regla de la cadena y del teorema fundamental del cálculo, al derivar por componentes se obtiene

$$\gamma'(s) = \operatorname{Re}\alpha(h(s))h'(s) + i \operatorname{Im}\alpha(h(s))h'(s)\,) = \alpha(h(s))h'(s), \ \forall\, s \in [a,b].$$

Lo cual indica que γ es una primitiva de $\alpha(h(s))h'(s)$ en $[c,d]$. De acuerdo al teorema fundamental del cálculo, esto implica que

$$\int_c^d \alpha(h(s))h'(s)ds = \gamma(d) - \gamma(c) = \beta(h(d)) - \beta(h(c)) = \int_{h(c)}^{h(d)} \alpha(t)dt. \ \square$$

Observación 1. Se dice que la fórmula (1) es de cambio de variable pues en la izquierda se integra en el intervalo $[a,b]$ y en la derecha se integra en el intervalo $h([a,b]) \subseteq [c,d]$. Notemos que el miembro derecho se obtiene a partir del miembro izquierdo tomando $t = h(s)$, (formalmente) $dt = h'(s)ds$ y cambiando los límites de integración de forma correspondiente.

Convergencia uniforme e integrabilidad

Proposición 1. Sean $I = [a,b], \{\alpha_n\} \subseteq C(I,\mathbb{C})$ y $\alpha \in F(I,\mathbb{C})$. Si $\alpha_n \xrightarrow{u} \alpha$, entonces $\alpha \in C(I,\mathbb{C})$ y $\lim_{n\to\infty} \int_I \alpha_n(t)dt = \int_I \alpha(t)dt$.

Demostración Ya que $\{\alpha_n\} \subseteq C(I,\mathbb{C})$ y $\alpha_n \xrightarrow{u} \alpha$, observemos primero que $\alpha \in C(I,\mathbb{C})$.

Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $\alpha_n \xrightarrow{u} \alpha$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\alpha_n(t) - \alpha(t)| \ \le \ \frac{\epsilon}{\ell(I)+1}, \ \ \forall\, n \ge N, \ \forall\, t \in [a,b]. \tag{2}$$

A partir de la linealidad y la desigualdad del triángulo para la integral de curvas, de (2) resulta ahora que

$$\left|\int_I \alpha_n - \int_I \alpha\right| \ = \ \left|\int_I (\alpha_n - \alpha)\right| \ \le \ \int_I |\alpha_n - \alpha| \ \le \ \epsilon, \ \forall\, n \ge N. \ \square$$

6.2. Curvas rectificables

Recordemos que una *partición* de un intervalo $I = [a, b]$, donde $a \leq b$, es un conjunto finito de puntos $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tales que $a = t_0 \leq t_1, \ldots \leq t_n = b$. Denotaremos por $\Pi(I)$ la colección de todas las particiones del intervalo I.

Si $\mathcal{Q}$ es otra partición de I y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, diremos que $\mathcal{Q}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{P}$. Notemos que esto equivale a que $\mathcal{Q}$ se obtiene agregando a $\mathcal{P}$ un número finito de puntos.

Definición 1. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función.
a) Si $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $I = [a, b]$, entonces la *variación de α en $\mathcal{P}$* es

$$V(\alpha, \mathcal{P}) \ := \ \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k)| \ .$$

b) La *variación* de α es entonces

$$V(\alpha) \ := \ \sup_{\mathcal{P} \in \Pi(I)} V(\alpha, \mathcal{P}).$$

Cuando $V(\alpha)$ sea finito, diremos que α es de *variación acotada*
c) Si α es continua y de variación acotada, la llamaremos curva *rectificable* y su longitud es $\ell(\alpha) := V(\alpha)$.

Conviene notar que $V(\alpha, \mathcal{P})$ corresponde a la longitud de la poligonal determinada por los puntos $\alpha(a), \alpha(t_1), \ldots, \alpha(b)$, la cual en adelante denotaremos simplemente por $[\alpha(a), \alpha(t_1), \ldots, \alpha(b)]$. (Véase la figura 1.)

Observación 1. Sea $I = [a, b]$ y $\alpha \in C(I, \mathbb{C})$. Tomando la partición $\mathcal{P} = \{a, b\}$ de I, resulta que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq V(\alpha).$$

Observación 2. Sean $I = [a, b]$, $\alpha : I \to \mathbb{C}$ y $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \Pi(I)$. Tomemos $t' \in I \setminus \mathcal{P}$ y escojamos $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $t_{k-1} < t' < t_k$. Luego

$$|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1}| \leq |\alpha(t_k - \alpha(t')| + |\alpha(t') - \alpha(t_{k-1}|. \tag{3}$$

Consideremos ahora la partición $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{t'\}$. Usando (3) se sigue que $V(\alpha, \mathcal{P}) \leq V(\alpha, \mathcal{P}')$. Repitiendo este argumento un número finito de veces, concluimos que

$$\text{si } \mathcal{Q} \text{ es un refinamiento de } \mathcal{P}, \text{ entonces } V(\alpha, \mathcal{P}) \leq V(\alpha, \mathcal{Q}). \tag{4}$$

Lema 1. *Sean* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$, $c \in [a, b]$ *y* $\alpha_1 := \alpha_{[a,c]}, \alpha_2 := \alpha_{[c,b]}$. *Entonces,* α *es de variación acotada si, y sólo si,* α_1 *y* α_2 *lo son. En cualquiera de estos casos, se cumple* $V(\alpha) = V(\alpha_1) + V(\alpha_2)$.

Demostración Supongamos primero que α es de variación acotada. Sean $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ y $\mathcal{Q} = \{s_0, \ldots, s_m\}$ particiones de $[a, c]$ y de $[c, b]$, respectivamente. Luego, $\mathcal{R} = \{t_0, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m\}$ es una partición de $[a, b]$ y se cumple

$$V(\alpha) \geq V(\alpha, \mathcal{R}) \;=\; V(\alpha_1, \mathcal{P}) + V(\alpha_2, \mathcal{Q}). \tag{5}$$

Fijando $\mathcal{Q}$ y tomando el supremo sobre todas las particiones $\mathcal{P}$ de $[a, c]$, de la desigualdad anterior llegamos a que

$$V(\alpha) \;\geq\; V(\alpha_1) + V(\alpha_2, \mathcal{Q}).$$

Tomando ahora el supremo sobre todas las particiones $\mathcal{Q}$ de $[c, b]$ se obtiene

$$V(\alpha) \;\geq\; V(\alpha_1) + V(\alpha_2).$$

Para establecer la otra desigualdad, sea $\mathcal{R} := \{r_0, \ldots, r_j\}$ una partición de $[a, b]$ que incluya a c dentro de sus puntos, digamos $r_n = c$, donde podemos suponer que $n \in \{1, \ldots, j-1\}$. Sea $s_k = r_{n+k},\ k = 0, \ldots, n-j$. Entonces $\mathcal{P} = \{r_0, \ldots, r_n\}$ es una partición de $[a, c]$, $\mathcal{Q} = \{s_0, \ldots, s_{n-j}\}$ es una partición de $[c, b]$ y se cumple

$$V(\alpha, \mathcal{R}) \;=\; V(\alpha_1, \mathcal{P}) + V(\alpha_2, \mathcal{Q}) \leq V(\alpha_1) + V(\alpha_2).$$

Teniendo presente (4), esto implica que $V(\alpha) \leq V(\alpha_1) + V(\alpha_2)$. □

Definición 2. Una función $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ es *de clase* C^1, si α es derivable y su derivada $\alpha' : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua.

Observación 3. Sean $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ de clase C^1 y $a \leq r \leq s \leq b$. Luego, por el teorema fundamental del cálculo para curvas, se cumple

$$\alpha(s) - \alpha(r) = \int_r^s \alpha'(t)dt. \tag{6}$$

Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ es de clase C^1, notemos que la función f definida por $f(s) = |\alpha'(s)|, s \in [a, b]$ es continua.

Proposición 1. Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva de clase C^1, entonces α es rectificable y $\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$.

Demostración Veamos primero que α es rectificable. Tomemos $I = [a,b]$ y sea $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \Pi(I)$. Luego, usando (6) se obtiene

$$V(\alpha, \mathcal{P}) \;=\; \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\alpha'(s)|ds = \int_a^b |\alpha'(s)|ds.$$

Lo cual implica que

$$\ell(\alpha) \leq \int_a^b |\alpha'(s)|ds < \infty, \tag{7}$$

y esto prueba que α rectificable.

En vista de la desigualdad previa, sólo resta establecer la desigualdad

$$\int_a^b |\alpha'(s)|ds \leq \ell(\alpha). \tag{8}$$

Con este propósito probaremos primero que, para cada $\epsilon > 0$ se satisface

$$0 \leq \int_a^b |\alpha'(t)|dt - \ell(\alpha) \leq 2\epsilon(b-a). \tag{9}$$

Después, al hacer $\epsilon \to 0$ obtendremos (9).

Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de α' en I fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si} \;\; s,t \in I \text{ y } |s-t| < \frac{1}{N}, \text{ entonces } \; |\alpha'(s) - \alpha(t)| < \epsilon. \tag{10}$$

Elijamos después una partición $\mathcal{P} : a = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n = b$ de I tal que $|t_{j-1} - t_j| \leq \frac{1}{N}, \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Dado $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ denotemos por α_j la restricción de α al intervalo $I_j := [t_{j-1}, t_j]$. Entonces

$$\ell(\alpha_j) \geq |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| = \left| \int_{I_j} \alpha'(t)dt \right|.$$

Usando ahora el lema 1 y la desigualdad anterior llegamos a que

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\alpha'(t)|dt - \ell(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{I_j} |\alpha'(t)|dt - \ell(\alpha_j) \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{I_j} |\alpha'(t)|dt - \left| \int_{I_j} \alpha'(t)dt \right| \right). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Fijemos $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ y tomemos $t \in I_j$. Puesto que $|t - t_{j-1}| < \frac{1}{N}$ y $\alpha'(t) = \alpha'(t_{j-1}) + \alpha'(t) - \alpha'(t_{j-1})$, al emplear (8) obtenemos

$$|\alpha'(t)| \leq |\alpha'(t_{j-1})| + \epsilon.$$

Lo cual implica que

$$\int_{I_j} |\alpha'(t)|dt \leq \int_{I_j} |\alpha'(t_{j-1})|dt + \epsilon(t_j - t_{j-1}). \qquad (12)$$

Por otro lado, ya que $\int_{I_j} \alpha'(t)dt = \int_{I_j} \alpha'(t_{j-1})dt + \int_{I_j} (\alpha'(t) - \alpha'(t_{j-1}))dt$ llegamos a que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{I_j} \alpha'(t)dt \right| &\geq \left| \int_{I_j} \alpha'(t_{j-1})dt \right| - \left| \int_{I_j} (\alpha'(t) - \alpha'(t_{j-1}))dt \right| \\
&\geq \left| \int_{I_j} \alpha'(t_{j-1})dt \right| - \epsilon(t_j - t_{j-1}). \qquad (13)
\end{aligned}$$

De (12) y (13) se obtiene que

$$\left(\int_{I_j} |\alpha'(t)|dt - \left| \int_{I_j} \alpha'(t)dt \right| \right) \leq 2\epsilon(t_j - t_{j-1}), \ \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Empleando esto en (11) y simplificando resulta (9). $\square$

Notas
Clase 26, mayo 9, 2022
Fernando Galaz Fontes