Ejemplo 1.
1. Consideremos $w, z \in \mathbb{C}$. Recordemos que la curva $s_{w,z}$ está definida por $s_{w,z} = (1-t)w + tz, 0 \leq t \leq 1$. Tomemos $\alpha = s_{w,z}$. Ya que $\alpha'(t) = z - w$, esta curva es es de clase C^1. Puesto que $|\alpha'(t)| = |z - w|$, el resultado anterior indica que su longitud es

$$\ell(s_{w,z}) \;=\; \int_0^1 |z-w|\, dt \;=\; |z-w|.$$

2. Consideremos $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Recordemos que la curva $c_{z,r}$ está definida por $c_{z,r}(t) := c_{z,r}(t) = z + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Tomemos $\beta = c_{z,r}$. Ya que $\beta'(t) = rie^{it}$, esta curva es de clase C^1. Puesto que $|\beta'(t)| = r$, el resultado anterior indica que su longitud es

$$\ell(c_{z,r}) \;=\; \int_0^{2\pi} r\, |e^{it}|\, dt \;= 2\pi r.$$

6.3. Integral de Cauchy

Definición 1. Sean $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva de clase C^1 y $f : \alpha^* \to \mathbb{C}$ una función continua. La *integral de (Cauchy de) f a lo largo de α* (o sobre α) es

$$\int_\alpha f(z)dz \;:=\; \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt. \tag{1}$$

Observación 1.
1. Puesto que la función $\beta(t) = f(\alpha(t))\alpha'(t), \forall\, t \in [a, b]$, es continua, se sigue que la integral en (1) está bien definida.

2. Notemos que el integrando en el miembro derecho en (1) se puede obtener formalmente al tomar $z = \alpha(t)$ y $dz = \alpha'(t)dt$, y sustituirlos en el miembro izquierdo. Esto hace que no sea conveniente denotar esta integral simplmente por $\int_\alpha f$.

Ejemplo 1. Sean $w, z \in \mathbb{C}$ y $\alpha = s_{w,z}$ el segmento orientado (o dirigido) que va de w a z, esto es $\alpha(t) := w + t(z - w),\ \forall\, t \in [0, 1]$. Nos interesa calcular $\int_\alpha \overline{z}\, dz$.

Ya que $\alpha'(t) = (z - w)$, resulta

$$\begin{aligned}\int_\alpha \overline{z}dz \;&=\; \int_0^1 \overline{w + t(z-w)}(z-w)dt = \int_0^1 (\overline{w}(z-w) + |z-w|^2\, t)dt \\ &=\; \overline{w}(z-w) + \frac{1}{2}\, |z-w|^2\, .\end{aligned}$$

FIGURA 2

Extenderemos a continuación la definición de la integral de Cauchy a una clase más amplia de curvas.

Definición 2. Un *camino*, o curva *de clase C^1 por pedazos*, es una curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $\alpha'(t)$ existe y es continua en $[a,b]$, excepto posiblemente en un número finito de puntos. Además, en cada uno de estos puntos excepcionales t, las derivadas laterales

$$\alpha'(t^-) := \lim_{t\to 0^+} \frac{\alpha(t-h)-\alpha(t)}{h}, \quad \alpha'(t^+) := \lim_{t\to 0^+} \frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h},$$

existen y son continuas por la izquierda y por la derecha, respectivamente. A la partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ obtenida al agregar a $\{a, b\}$ aquellos puntos donde α no es derivable la llamaremos *partición canónica asociada a α*. La colección de todos los caminos $\alpha : [a.b] \to \mathbb{C}$ se denotará por $C^1P[a,b]$.

Sea $\alpha \in C^1P[a,b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ su partición canónica asociada y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Ya que cada curva α_k es de clase C^1, de acuerdo al lema 2.1 y a la proposición 2.1 concluimos que un camino α siempre es rectificable y su longitud es

$$\ell(\alpha) = \ell(\alpha_1) + \ldots + \ell(\alpha_k).$$

Notemos que si α es una curva de clase C^1, entonces α es un camino.

Definición 3. Sea $\alpha \in C^1P[a,b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ su partición canónica asociada y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Sea $f : \alpha^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Puesto que α_k es de clase C^1 en $[t_{k-1}, t_k]$, definimos

$$\int_\alpha f(z) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_k} f(z). \tag{2}$$

Ya que cada curva α_k es de clase C^1, de acuerdo al lema 2.1 y a la proposición 2.1 concluimos que un camino α siempre es rectificable y su longitud es $\ell(\alpha) = \ell(\alpha_1) + \ldots + \ell(\alpha_k)$.

Ejemplo 2. Sea $\alpha \in C^1P[a,b]$ y supongamos primero que α es de clase C^1. Usando el teorema fundamental del cálculo para curvas resulta

$$\int_\alpha dz = \int_a^b \alpha'(t)dt = \alpha(b) - \alpha(a). \tag{3}$$

En el caso general, sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica asociada a α y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k], k = 1, \ldots, n$. Ya que cada α_k es de clase C^1, al hacer uso de (3) obtenemos

$$\int_\alpha dz = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k} dz = \sum_{k=1}^n (\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Así, la igualdad (3) siempre es válida.

Antes de establecer las principales propiedades de esta integral, introduciremos un concepto muy útil.

Norma infinito

Definición 4. Sea $D \subseteq \mathbb{C}$. La *norma infinito*, o norma del supremo, de una función $f : D \to \mathbb{C}$ es

$$\|f\|_\infty \ := \ \sup\{|f(z)| : z \in D\}.$$

Notemos que la condición $\|f\|_\infty < \infty$ equivale a que la función f sea acotada. De acuerdo al corolario 3.3.1, esto sucede siempre que D es compacto y f es continua. Asímismo, se cumple:

i) $|f(z)| \leq \ \|f\|_\infty, \ \forall\, z \in D$.

ii) Si $r \geq 0$, entonces

$$\|f\|_\infty \ \leq r \quad \text{si, y sólo si,} \ \ |f(z)| \ \leq \ r, \ \forall\, z \in D. \tag{4}$$

La norma infinito es una herramienta conveniente para trabajar con convergencia uniforme de funciones, según se aprecia en el siguiente resultado.

Proposición 1. Sean $D \subseteq \mathbb{C}$ y $f, f_n : D \to \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $f_n \xrightarrow{u} f$ si, y sólo si, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Demostración Supongamos primero que $f_n \xrightarrow{u} f$ y consideremos $\epsilon > 0$. Existe entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon, \forall n \geq N,\ \forall z \in D.$$

Lo cual implica que $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon,\ \forall n \geq N$. Esto prueba que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Supongamos ahora que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ y consideremos $\epsilon > 0$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon,\ \forall n \geq N$. Por lo tanto se cumple

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon, \forall n \geq N.\ \forall z \in D.$$

Así, $f_n \xrightarrow{u} f$. $\square$

Observación 2. En ocasiones no es necesario considerar la norma infinito de una función $f : D \to \mathbb{C}$, sino de su restricción a algún subconjunto $E \subseteq D$. En tal caso emplearemos la notación $\|f\|_{\infty,E}$.

Notas
Clase 27, mayo 11, 2022
Fernando Galaz Fontes