Teorema 1. Sea $\alpha \in C^1P[a,b]$.
i) La integral de Cauchy es lineal, esto es

$$\begin{aligned} \int_\alpha (f(z)+g(z))dz &= \int_\alpha f(z)dz + \int_\alpha g(z)dz, \\ \int_\alpha cf(z)dz &= c\int_\alpha f(z)dz, \quad \forall\, f,\, g \in C(\alpha^*),\ c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

ii) La integral de Cauchy es aditiva respecto al dominio de integración: Sean $c \in (a,b)$, $\beta := \alpha_{[a,c]}$ y $\gamma := \alpha_{[c,b]}$. Entonces β y γ también son caminos y

$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz,\ \forall\, f \in C(\alpha^*).$$

iii) $\left|\int_\alpha f(z)dz\right| \leq \|f\|_\infty\ \ell(\alpha),\ \forall\, f \in C(\alpha^*)$.

Demostración i) Consideraremos primero el caso en que la curva en cuestión es de clase C^1. Aplicando la linealidad de la integral de curvas obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\alpha (f(z)+g(z))dz &= \int_a^b (f(\alpha(t))+g(\alpha(t)))\alpha'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt + \int_a^b g(\alpha(t))\alpha'(t)dt \\ &= \int_\alpha f(z)dz + \int_\alpha g(z)dz. \end{aligned}$$

En el caso general denotemos por $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica asociada a α y y sea α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k], k = 1, \ldots, n$. Ya que cada α_k es de clase C^1, después de hacer uso de lo que se probó en el primer caso y agrupar adecuadamente, resulta

$$\begin{aligned} \int_\alpha (f(z)+g(z))dz &= \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k} (f(z)+g(z))dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{\alpha_k} f(z)dz + \int_{\alpha_k} g(z)dz\right) \\ &= \int_\alpha f(z)dz + \int_\alpha g(z)dz. \end{aligned}$$

La otra propiedad se establece procediendo de forma similar.

ii) Supongamos primero que la curva α es de clase C^1. Entonces β y γ también son de clase C^1 y, por la aditividad respecto del dominio para curvas, se cumple

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)dz &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt \\ &= \int_a^c f(\alpha(t))\alpha'(t)dt + \int_c^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_\beta f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

En el caso general denotemos por $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica asociada a α y sea α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n$. Consideremos $c \in (a, b)$ y $\beta = \alpha_{[a,c]},\ \gamma = \alpha_{[c,b]}$. Observemos primero que tanto β como γ son caminos. Se presentan dos posibilidades. Discutiremos la situación en que $c \in (t_{m-1}, t_m)$, para algún $m = 1, \ldots, n$; la situación restante se puede analizar de forma más directa. Tomemos entonces $\beta_c = \alpha_{[t_{m-1},c]}$ y $\gamma_c = \alpha_{[c,t_m]}$. Ya que α_m es clase C^1, por lo probado en el primer caso, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)dz &= \sum_{k=1}^{m-1}\int_{\alpha_k} f(z)dz + \int_{\alpha_m} f(z)dz + \sum_{k=m+1}^{n}\int_{\alpha_k} f(z)dz \\ &= \sum_{k=1}^{m-1}\int_{\alpha_k} f(z)dz + \left(\int_{\beta_c} f(z)dz + \int_{\gamma_c} f(z)dz\right) \\ &\qquad + \sum_{k=m+1}^{n}\int_{\alpha_k} f(z)dz \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m-1}\int_{\alpha_k} f(z)dz + \int_{\beta_c} f(z)dz\right) + \left(\int_{\gamma_c} f(z)dz\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=m+1}^{n}\int_{\alpha_k} f(z)dz\right) \\ &= \int_\beta f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

iii) Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica asociada a α y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n$.

Fijemos $k = 1, \ldots, n$. Por la desigualdad del triángulo para integrales de curvas, teniendo presente que $|f(z)| \leq \|f\|_\infty, \forall\, z \in \alpha^*$, y usando la proposición 2.1, resulta

$$\left|\int_{\alpha_k} f(z)dz\right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\alpha(t))||\alpha'(t)|dt \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f\|_\infty |\alpha'(t)|dt = \|f\|_\infty\, \ell(\alpha_k).$$

Por lo tanto

$$\left|\int_\alpha f dz\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{\alpha_k} f(z)dz\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \|f\|_\infty \ell(\alpha_k) = \|f\|_\infty\, \ell(\alpha). \quad \square$$

Corolario 1. Sean $\alpha \in C^1P[a,b]$ y $\{f_n\} \subseteq C(\alpha^*),\ f \in C(\alpha^*)$.
i) Si $f_n \xrightarrow{u} f$ en α^*, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha f_n(z)dz = \int_\alpha f(z)$.
ii) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformente en α^*, entonces se cumple que $\int_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha f_n(z)dz$.

Demostración i) Sea $n \in \mathbb{N}$. Usando la linealidad y la propiedad iii) de la integral de Cauchy resulta

$$\left|\int_\alpha f_n(z) - \int_\alpha f(z)\right| = \left|\int_\alpha (f_n(z) - f(z))dz\right| \leq \|f_n - f\|_\infty \ell(\alpha). \qquad (1)$$

Por hipótesis, $f_n \xrightarrow{u} f$, lo cual equivale a que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. De (1) se sigue entonces que $\int_\alpha f_n dz \to \int_\alpha f dz$.

ii) Tomemos $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Luego, S_n es continua y, por hipótesis, $\{S_n\}$ converge uniformemente a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. De acuerdo con i) y la linealidad de la integral, esto implica

$$\int_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha \sum_{k=0}^{n} f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_\alpha f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha f_n(z)dz. \quad \square$$

El concepto que introduciremos a continuación será muy útil en adelante.

Definición 4. La *distancia* de un punto $x \in \mathbb{C}$ a un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es dist $(x, A) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.

Observación 3.

i) Recordemos que $\inf \emptyset = \infty$.

ii) Si $A \neq \emptyset$, entonces $0 \leq \text{dist}\ (x, A) < \infty$.

Lema 1. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto no-vacío y $x \in \mathbb{C}$.*

i) Si $0 < r <$ dist (x, A), entonces $A \cap D_r(x) = \emptyset$.

ii) Si dist $(x, A) < r$, entonces $A \cap D_r(x) \neq \emptyset$.

iii) $d(x, A) = 0$ si, y sólo si, $x \in \bar{A}$. Equivalentemente, $d(x, A) > 0$ si, y sólo si, $x \notin \overline{A}$.

Demostración Dejaremos la prueba de ii) y iii) como ejercicio.

iii) Supongamos que $0 = d(x, A) = \inf\{d(x, w) : w \in A\}$. Entonces podemos encontrar una sucesión $\{w_n\} \subseteq A$ tal que $d(x, w_n) \to 0$, esto es, $w_n \to x$. Por lo tanto $x \in \overline{A}$.

Supongamos ahora que $x \in \overline{A}$. Entonces existe una sucesión $\{w_n\} \subseteq A$ tal que $d(w_n, x) \to 0$. Ya que $0 \leq d(x, A) \leq d(x, w_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, al hacer $n \to \infty$ se sigue que $d(x, A) = 0$. $\square$

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto no vacío. Si A es cerrado y $x \notin A$, notemos que el resultado anterior indica que $d(x, A) > 0$.

Lema 2. *Sean $\alpha \in C^1P[a, b]$. Dada $f \in C(\alpha^*)$, definamos*

$$F(z) = \int_\alpha \frac{f(w)}{w - z} dw, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \alpha^*. \tag{2}$$

i) Para cada $a \in \mathbb{C} \setminus \alpha^*$ la función F tiene un desarrollo en serie de potencias en el disco $D_R(a)$, donde $R =$ dist $(a, \alpha^*) > 0$.

Por lo tanto, F tiene derivadas de todos los órdenes en $\mathbb{C} \setminus \alpha^*$. Además éstas se pueden obtener derivando bajo la integral en (2). Así,

$$F^{(n)}(z) = n! \int_\alpha \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \alpha^*. \tag{3}$$

ii) $\lim_{|z| \to \infty} F(z) = 0$.

Demostración Tomemos $C = \mathbb{C} \setminus \alpha^*$ y $z \in C$. Luego $w - z \neq 0, \forall w \in \alpha^*$. Por lo tanto la función $w \to \frac{f(w)}{w - z}$ es continua en α^*. Esto muestra que $F(z)$ está bien definida.

Fijemos ahora $a \in C$ y sea $R = \text{dist }(a, \alpha^*)$. Puesto que α^* es cerrado y $a \notin \alpha^*$, se cumple que $R > 0$. Dado r tal que $0 < r < R$, probaremos que F tiene un desarrollo en serie de potencias en $D_r(a)$. De acuerdo a la observación 5.3.2, los coeficientes de esta serie de potencias no dependen de r, con lo cual se seguirá lo afirmado.

Sea pues $0 < r < R$ y escojamos ρ tal que $0 < r < \rho < R$. Consideremos $w \in \alpha^*$ y $z \in D_r(a)$. Entonces $|w - a| \geq R\ > \rho > \frac{\rho}{r}\ |z - a|$. Luego

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < \frac{r}{\rho} < 1,\ \forall\, w \in \alpha^*,\ \forall\, z \in D_r(a). \tag{4}$$

Por consiguiente, para tales w y z se satisface

$$\begin{aligned}(w-z)^{-1} &= (w-a-z+a)^{-1} = (w-a)^{-1}\left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)^{-1} \\ &= (w-a)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n. \tag{5}$$

Siendo continua, la función $w \to \frac{f(w)}{w-a}$ es acotada en α^*. De acuerdo con (4) y el criterio M de Weierstrass, esto implica que la convergencia de la serie en (5) es uniforme respecto de $w \in \alpha^*$. Luego, al integrar sobre α^*, resulta

$$F(z) = \int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw \ = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\alpha \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n,\ \forall\, z \in D_r(a).$$

La expresión anterior indica que F es una serie de potencias alrededor de a. Esto permite concluir que F tiene derivadas de todos los órdenes y que además satisfacen (3).

Notas
Clase 28, mayo 16, 2022
Fernando Galaz Fontes