ii) Tomemos $\ell = \ell(\alpha)$ y $M = \sup\{|w|\colon w \in \alpha^*\}$. Dado $\epsilon > 0$ escojamos un número real R tal que

$$R > 2M, \ R > \frac{2\ell\|f\|_\infty}{\epsilon}.$$

Consideremos z tal que $|z| \ \geq R$ y $w \in \alpha^*$. Entonces

$$|w - z| \geq |z| - |w| \geq |z| - M \geq \frac{R}{2}.$$

Luego $\dfrac{|f(w)|}{|w-z|} \leq \dfrac{2\|f\|_\infty}{R}$, $\forall\, w \in \alpha^*$. Por iii) del teorema 1, esto implica

$$\left|\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw\right| \ \leq \ \frac{2\|f\|_\infty}{R}\ell \leq \epsilon. \ \square$$

Indice respecto a una curva cerrada

Definición 1. Una curva α en $\mathbb{C}$ es una *curva cerrada* si su punto inicial coincide con su punto final.

Definición 2. Sea α un camino cerrado en $\mathbb{C}$. El *índice* de $z \in \mathbb{C} \setminus \alpha^*$ es entonces

$$\mathrm{Ind}_\alpha(z) \ := \ \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dw}{w-z}.$$

Teorema 2. Sean α un camino cerrado en $\mathbb{C}$ y $C := \mathbb{C} \setminus \alpha^*$. Entonces:

i) La función Ind_α sólo toma valores enteros.

ii) La función Ind_α es constante en cada componente conexa de C y vale 0 en su componente conexa no-acotada.

Demostración Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica asociada a α y sea α_k la restricción de α al intervalo $I_k = [t_{k-1}, t_k], \ k = 1, \ldots, n$.

i) Fijemos $z \in C$. De acuerdo con iii) de la proposición 1.3.2, para establecer que $\mathrm{Ind}_\alpha(z)$ es un entero es suficiente probar que

$$1 \ = \ e^{\int_\alpha \frac{dw}{w-z}}. \tag{1}$$

Fijando $k = 1, \ldots, n$, analizaremos en seguida la función

$$\varphi(t) = e^{\displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t} \frac{\alpha'(s)}{\alpha(s) - z} ds}, \ t \in I_k. \tag{2}$$

De (2), después de derivar usando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo, resulta

$$\varphi'(t)\,(\alpha(t) - z) = \alpha'(t)\,\varphi(t), \ \forall\, t \in I_k.$$

Lo cual implica que la función

$$h(t) \ = \ \frac{\varphi(t)}{\alpha(t) - z}, \ \forall\, t \in I_k.$$

tiene derivada 0. Luego, h es constante. Entonces

$$\varphi(t) = h(t_{k-1})(\alpha(t) - z) = \frac{\alpha(t) - z}{\alpha(t_{k-1}) - z}, \ \forall\, t \in I_k.$$

Lo cual implica que

$$e^{\int_{\alpha_k} \frac{dw}{w-z}} = \varphi(t_k) \ = \ \frac{\alpha(t_k) - z}{\alpha(t_{k-1}) - z}.$$

De esto resulta

$$e^{\sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_k} \frac{dw}{w-z} dt} = \frac{\alpha(t_1) - z}{\alpha(t_0) - z} \cdots \frac{\alpha(t_n) - z}{\alpha(t_{n-1}) - z} = 1,$$

pues α es cerrada. Esto prueba (1).

ii) Tomando $f = 1$ en el lema 2, se concluye que la función $g = \mathrm{Ind}_\alpha$ es continua. Sea C_0 una componente conexa de C. Entonces, $g(C_0)$ también es conexa. Teniendo presente i), esto implica que $g(C_0)$ consiste de un sólo punto, esto es, g es constante en C_0.

Sea C_1 la componente conexa de C que es no-acotada. De acuerdo con lo que se acaba de probar, notemos que para concluir que $\mathrm{Ind}_\alpha = 0$ en C_1 basta establecer que existe $z \in C_1$ tal que $|\mathrm{Ind}_\alpha(z)| < 1$. Lo cual se sigue de ii) en el lema 2. $\square$

FIGURA 2

Ejemplo 3. Calcularemos en seguida la función índice correspondiente a la circunferencia orientada $\alpha = c_{a,r}$, donde $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$.

En este caso las componentes conexas de $C := \mathbb{C} \setminus \alpha^*$ son $C_1 := D_r(a)$ y $C_2 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| > r\}$. Notando que C_2 es la componente conexa no-acotada de C, por el teorema anterior se cumple que $\mathrm{Ind}_\alpha = 0$ en C_2. Por otra parte, para obtener el valor de Ind_α en C_1, basta encontrar $\mathrm{Ind}_\alpha(a)$. Tomando $w = \alpha(t) = a + re^{it}, \forall\, t \in [0, 2\pi]$, resulta $\frac{1}{w-a} = \frac{1}{re^{it}}$ y $dw = rie^{it}dt$. Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_\alpha(a) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dw}{w-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} idt = 1.$$

Resumiendo, hemos encontrado que

$$\mathrm{Ind}_{c_{a,r}}(z) \ = \ \left\{ \begin{array}{ll} 1, & |z-a| < \ r \\ 0, & |z-a| > \ r \end{array} \right. .$$

6.3. Cálculo de Integrales

Empezaremos analizando el comportamiento de la integral de Cauchy bajo reparametrizaciones.

Definición 1. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva, entonces su *curva opuesta* es la curva α_{op} definida por

$$\alpha_{\mathrm{op}}(s) = \alpha(-s), \ \forall\, s \in [-b, -a].$$

En la figura 2 se describe geométricamente α_{op}.

Observación 1.

1. Aunque α_{op} tiene la misma trayectoria que α, debemos notar que la recorre en “sentido contrario”. En lugar de ‘α_{op}’ también se usa la notación ‘$-\alpha$’.

2. Si α es un camino, notemos que α_{op} también lo es.

FIGURA 3

Definición 2. Unas curvas $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ son *similares*, si existe una biyección $h : [a, b] \to [c, d]$ de clase C^1 tal que $h' > 0$ en $[a, b]$ y

$$\alpha(t) = \beta(h(t)), \ \forall\, t \in [a, b]. \tag{3}$$

En la figura 3 se ilustra la situación que se acaba de considerar.

Observación 2.
1. Puesto que $h' > 0$ en $[a, b]$, la función $h : [a, b] \to [c, d]$ que aparece en la definición anterior es creciente. Luego $h(a) = c$ y $h(b) = d$. Asímismo, la función $h^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ también es de clase C^1.
2. Ya que h es una biyección, de la condición (3) resulta que $\alpha^* = \beta^*$.

Observación 3. 1. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica de $[a, b]$ asociada y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Se obtiene entonces que

$$\alpha = \alpha_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_n.$$

2. Si un camino β le sigue a un camino α, entonces $\alpha \dot{+} \beta$ es un camino.

Proposición 1. Consideremos caminos $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$.

i) Entonces $\int_{\alpha^{\text{op}}} f(z)dz \ = \ -\int_\alpha f(z)dz, \ \forall\, f \in C(\alpha^*)$.

ii) Si α y β son similares, entonces $\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz, \ \forall\, f \in C(\alpha^*)$.

iii) Si β le sigue a α, entonces

$$\int_{\alpha \dot{+} \beta} f(z)dz = \int_\alpha f(z)dz + \int_\beta f(z)dz, \ \forall\, f \in C(\alpha^* \cup \beta^*).$$

Demostración i) Sea $f \in C(\alpha^*)$. Consideremos primero el caso en que α de clase C^1. Ya que $\alpha_{\mathrm{op}}(s) = \alpha(-s), \forall\, s \in [-b,-a]$, por la regla de la cadena, resulta que α_{op} también es de clase C^1. Luego, después de usar el cambio de variable $t = -s$, de acuerdo al teorema 1.3 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_{\mathrm{op}}} f(z)dz &= -\int_{-b}^{-a} f(\alpha(-s))\alpha'(-s)ds \\ &= \int_b^a f(\alpha(t))\alpha'(t)dt = -\int_\alpha f(z)dz.\end{aligned}$$

En el caso general sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica asociada a α y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n$. Entonces la partición canónica asociada a α_{op} es $\mathcal{Q} = \{-t_n, \ldots, -t_0\}$ y su restricción al intervalo $[-t_k, -t_{k-1}]$ es $(\alpha_k)_{\mathrm{op}}$. Teniendo presente lo que se acaba de establecer, se obtiene entonces que

$$\int_{\alpha_{\mathrm{op}}} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{(\alpha_k)_{\mathrm{op}}} f(z)dz = -\sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k} f(z)dz = -\int_\alpha f(z)dz.$$

Notas
Clase 29, mayo 18, 2022
Fernando Galaz Fontes