ii) Sea $h : [a, b] \to [c, d]$ una biyección de clase C^1 tal que $h'(x) > 0, \forall\, x \in [a, b]$ y $\alpha(t) = \beta(h(t)), \forall\, t \in [a, b]$. Consideremos primero el caso en que α es de clase C^1. Tomando $k = h^{-1}$, resulta que $\beta(s) = \alpha(k(s)),\ \forall\, s \in [c, d]$. Por la regla de la cadena, esto implica que β también es de clase C^1.

Sea $f \in C(\alpha^*)$. Notando que $\alpha'(t) = \beta'(h(t))\, h'(t)$, y haciendo después el cambio de variable $s = h(t)$ (teorema 1.3) obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)dz &= \int_a^b f(\alpha(t))\,\alpha'(t)\,dt = \int_a^b f(\beta(h(t)))\,\beta'(h(t))\,h'(t)dt \\ &= \int_c^d f(\beta(s))\,\beta'(s)ds = \int_\beta f(z)dz.\end{aligned}$$

En el caso general sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica asociada a α y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n$. Tomemos $\beta_k = \beta_{[h(t_{k-1}), h(t_k)]}, k = 1, \ldots, n$. Entonces, la partición canónica asociada a β es $\mathcal{Q} = \{h(t_0), h(t_1), \ldots, h(t_n)\}$ y su restricción al intervalo $[h(t_{k-1}, t_k]$ es β_k.

Sea $f \in C(\alpha^*)$. Luego, teniendo presente lo establecido en el caso anterior y la aditividad respecto al dominio de integración, se obtiene

$$\int_\alpha f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\beta_k} f(z)dz = \int_\beta f(z)dz.$$

iii) La curva $\alpha \dot{+} \beta$ está definida en $[a, b + d - c]$. Su restricción a $[a, b]$ es α. Por otra parte, su restricción γ a $[b, b + d - c]$ está dada por

$$\gamma(t) = \beta(h(t)),\ \forall\, t \in [b, b + d - c],$$

donde $h : [b, b + d - c] \to [c, d]$ está definida por $h(t) = c + t - b$. Esto indica que γ y β son curvas similares. Tomemos $f \in C(\alpha^* \cup \beta^*)$. Luego, por la aditividad de la integral respecto al dominio de integración y lo establecido en ii), se obtiene

$$\int_{\alpha \dot{+} \beta} f(z)dz = \int_\alpha f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha f(z)dz + \int_\beta f(z)dz. \quad \square$$

Observación 1. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ curvas en $\mathbb{C}$ de clase C^1, y tales que α_{k+1} le sigue a $\alpha_k,\ k = 1, \ldots, n - 1$. Tomemos $\beta = \alpha_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_n$, y consideremos $f \in C(\beta^*)$. Supongamos que nos interesa calcular $\int_\beta f(z)dz$. A partir de la definición, el primer paso consistiría en señalar la parametrización correspondiente para β. Esto resulta ser engorroso, más si se toma en cuenta que las curvas originales α_k pueden estar descritas de manera geométrica, señalando únicamente su trayectoria y el “sentido”en que es recorrida. En esta situación la proposición anterior proporciona otra forma de calcular $\int_\alpha f(z)dz$:

$$\int_\beta f(z)dz = \int_{\alpha_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\alpha_n} f(z)dz. \tag{1}$$

Así, en lugar de buscar una parametrización “uniforme” para α y en base a ella calcular $\int_\beta f(z)dz$, se puede continuar trabajando directamente con las parametrizaciones originales de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Cadenas

Ya que nuestro interés principal en las curvas es poder integrar a lo largo de ellas, la ecuación (1) lleva a considerar expresiones del tipo

$$\alpha_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_n,$$

donde α_1, …, α_n son curvas de clase C^1P, pero ya no necesariamente “consecutivas”. A tales expresiones formales las llamaremos *cadenas*. La conveniencia de esta definición es que, como iremos viendo, permite expresarnos de manera más concisa y simplifica el cálculo de integrales a lo largo de curvas.

Definición 1. Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ caminos y α la cadena $\alpha = \alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n$. Entonces:

a) $\alpha^* \ = \ \cup_{j=1}^n \alpha_j^*$.

b) $\int_\alpha f(z)dz \ := \ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} f(z)dz, \ \forall\, f \in C(\alpha^*)$.

c) La *cadena opuesta* a α es $(\alpha)_{\text{op}} := (\alpha_1)_{\text{op}} \dot{+} \ldots \dot{+} (\alpha_n)_{\text{op}}$.

Sean $\beta_1, \cdots, \beta_m$ caminos y $\beta = \beta_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \beta_m$.

d) Entonces:

$$\alpha + \beta := \alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n \dot{+} \beta_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \beta_m, \tag{2}$$

e) Las cadenas α y β son *equivalentes*, si

$$\int_\alpha f(z)dz \ = \ \int_\beta f(z)dz, \ \forall\, f \in C(\alpha^* \cup \beta^*).$$

Para indicar que esto sucede, usaremos la notación $\alpha \sim \beta$.

f) Indicaremos $\alpha \sim 0$ para expresar que $\int_\alpha f = 0, \forall\, f \in C(\alpha^*)$.

Observación 2. Sean α, β y γ cadenas. Es sencillo verificar que se cumplen las siguientes propiedades:

i) $\alpha \sim \alpha$.

ii) Si $\alpha \sim \beta$, entonces $\beta \sim \alpha$.

iii) Si $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$ y $\beta^* \subseteq \alpha^* \cup \gamma^*$, entonces $\alpha \sim \gamma$.

iv) Si $\alpha \dot{+} \beta \sim 0$ y $\beta \sim \gamma$, entonces $\alpha \dot{+} \gamma \sim 0$.

Dados $w, z \in \mathbb{C}$, recordemos que el segmento orientado que empueza en w y termina en z es $s_{w,z}(t) := w + t(z-w),\ 0 \leq t \leq 1$.

Ejemplo 3. Consideremos $a \in \mathbb{C}$. Entonces $s_{a,a}(t) = a, \forall\, t \in [0,1]$. Luego, $\int_{s_{a,a}} f(z)dz = 0$, $\forall\, f \in C(\{a\})$. Por lo tanto, $s_{a,a} \sim 0$.

Lema 1. *Sean $a, b \in \mathbb{C}$.*

i)Si $c \in [a,b]$, entonces $s_{a,c} \dot{+} s_{c,b} \sim s_{a,b}$.

ii) Los segmentos $s_{b,a}$ y $(s_{a,b})_{op}$ son similares. Luego, $s_{a,b} \dot{+} s_{b,a} \sim 0$.

Demostración i) Debemos probar que

$$\int_{s_{a,b}} f(z)dz \ = \int_{s_{a,c}} f(z)dz + \int_{s_{c,b}} f(z)dz,\ \forall\, f \in C([a,b]). \tag{3}$$

Claramente, la conclusión se satisface cuando $c = a$ o $c = b$. Supondremos en adelante que $c = a + t_0(b-a)$, donde $0 < t < 1$. Tomemos enseguida $\alpha := s_{a,b}$ y denotemos por α_0 la restricción de α al intervalo $[0, t_0]$ y por α_1 su restricción a $[t_0, 1]$. Por otra parte, tomemos $\beta_1 = s_{a,c},\ \beta_2 = s_{c,b}$.

Ya que α_1 le sigue a α_0 y $\alpha = \alpha_0 \dot{+} \alpha_1$, de iii) en la proposición 1 resulta que $\int_\alpha f(z)dz = \int_{\alpha_0} f(z)dz + \int_{\alpha_1} f(z)dz$. Usando ahora ii) en la proposición 1 resulta que para obtener (3) es suficiente probar que α_j es similar con β_j, $j = 0, 1$.

Notemos que $\beta_1(t) = a + t(c-a), \forall\, t \in [0,1]$ y $\beta_2(t) = c + t(b-c), \forall\, t \in [0,1]$. Ya que $c - a = t_0(b-a)$ y $b - c = (1-t_0)(b-a)$, resulta entonces

$$\beta_1(t) = a + tt_0(b-a) = \alpha(t_0 t) = \alpha_1(t_0 t),\ \forall\, t \in [0,1],$$

FIGURA 4

y

$$\begin{aligned}\beta_2(t) &= (a + t_0(b-a)) + t(1-t_0)(b-a)\\ &= \alpha(t_0 + t(1-t_0)) = \alpha_2(t_0 + t(1-t_0)), \forall\, t \in [0,1].\end{aligned}$$

ii) Veamos que los segmentos $\alpha = s_{b,a}$ y $\beta = (s_{a,b})_{\mathrm{op}}$ son similares. Para esto notemos que

$$\begin{aligned}\beta(t) &= a - t(b-a)\\ &= b + (1+t)(a-b) = \alpha(1+t),\ \forall\, t \in [-1,0]. \ \square\end{aligned}$$

Definición 2. En adelante, por un *tríangulo ordenado* en $\mathbb{C}$ simplemente entenderemos un punto $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Su *frontera orientada* es la cadena

$$\partial\Delta := s_{a,b} \dot{+} s_{b,c} \dot{+} s_{c,a},$$

Cuando nos refiramos a un triángulo ordenado $\Delta = (a,b,c)$ como un triángulo, entenderemos que se trata del triángulo usual definido por los vértices a, b, c.

Observación 3. Sea Δ_0 un triángulo usual, de vértices a, b, c. Este triángulo da lugar a 6 triángulos ordenados T. De la definición 1 se sigue inmediatamente que

$$\partial T \sim \partial\Delta, \quad \text{si } T \in \{(a,b,c), (b,c,a), (c,a,b)\}$$

y que

$$\partial T \sim (\partial\Delta)_{op}, \quad \text{si } T \in \{(a,c,b), (c,b,a), (b,a,c)\}.$$

Esto se resume diciendo que es posible dar dos “orientaciones” a un triángulo. En la figura 4 se ilustra geométricamente la situación considerada.

FIGURA 5

Ejemplo 4. Sea Δ un triángulo ordenado, con vértices a, b, c. Consideremos en seguida puntos a' en el lado $\overline{b,c}$, $b' \in \overline{c,a}$ y $c' \in \overline{a,b}$. Uniendo estos puntos se obtienen 4 subtriángulos. La orientación de Δ induce de manera natural una orientación en ellos. Se forman entonces los triángulos ordenados $\Delta_1 = (a, c', b')$, $\Delta_2 = (b, a', c')$, $\Delta_3 = (c, b', a')$ y $\Delta_4 = (a', b', c')$. Observemos que

$$\begin{aligned} \partial\Delta_1 &= s_{a,c'} \dot{+} s_{c',b'} \dot{+} s_{b',a}, & \partial\Delta_2 &= s_{b,a'} \dot{+} s_{a',c'} \dot{+} s_{c',b} \\ \partial\Delta_3 &= s_{c,b'} \dot{+} s_{b',a'} \dot{+} s_{a',c}, & \partial\Delta_4 &= s_{a',b'} \dot{+} s_{b',c'} \dot{+} s_{c',a'}. \end{aligned}$$

A partir del lema 1 se obtiene entonces que

$$\partial\Delta \sim \partial\Delta_1 \dot{+} \partial\Delta_2 \dot{+} \partial\Delta_3 \dot{+} \partial\Delta_4. \tag{4}$$

Observación 4. Consideremos la afirmación (4). Mientras que ahí $\partial\Delta$ es una curva cerrada, nótese que $\partial\Delta_1 \dot{+} \partial\Delta_2 \dot{+} \partial\Delta_3$ es un ciclo. Este tipo de situaciones hace necesaria la consideración de ciclos y no nada más de curvas consecutivas.

Notas
Clase 29, mayo 23, 2022
Fernando Galaz Fontes