Capítulo 7

Teorema de Cauchy y consecuencias

7.1. Teorema local de Cauchy

El siguiente resultado es una especie de teorema fundamental del cálculo en nuestro contexto.

Lema 1. *Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $\alpha : [a,b] \to W$ un camino y $f \in C(\alpha^*)$. Si existe $F \in H(W)$ tal que $F' = f$, entonces*

$$\int_\alpha f(z)dz \;=\; F(z_1) - F(z_0),$$

donde $z_1 = \alpha(b)$ y $z_0 = \alpha(a)$. En particular, si el camino α es una curva cerrada, entonces $\int_\alpha f(z)dz = 0$.

Demostración Supongamos primero que α es de clase C^1. Ya que $f = F'$, a partir de la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$\int_\alpha f(z)dz \;=\; \int_a^b F'(\alpha(t))\alpha'(t)dt \;=\; F(\alpha(t))\,\big|_a^b = \; F(z_1) - F(z_0).$$

Consideremos ahora el caso general. Sean $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición canónica de α y α_k la restricción de α al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Teniendo presente lo que se acaba de probar, resulta

$$\int_\alpha f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} (F(\alpha(t_k)) - F(\alpha(t_{k-1}))) = F(z_1) - F(z_0).$$

□

Observación 1. Notemos que, bajo las hipótesis consideradas, el resultado anterior indica que la integral $\int_\alpha f(z)dz$ no depende de la trayectoria de α sino únicamente de sus puntos inicial y final. Esto puede ser muy útil al calcular integrales de Cauchy.

Ejemplo 1. Consideremos $n \in I\!N_0$. Entonces

$$\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = z^n, \ \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Si α es un camino cerrado, del lema 1 resulta entonces que

$$\int_\alpha z^n dz = 0, \ \forall\, n \in I\!N_0. \tag{2}$$

De (2) y la linealidad de la integral de Cauchy, se sigue que si P es un polinomio y α un camino cerrado, entonces $\int_\alpha P(z)dz = 0$. Por lo tanto,

$$\text{si } \Delta \text{ es un triángulo ordenado y} P \text{ un polinomio, entonces } \int_{\partial\Delta} P(z)dz = 0. \tag{3}$$

Cuando $n = -2, -3, \ldots$, se sigue cumpliendo (1) para $z \neq 0$. Por consiguiente, suponiendo adicionalmente que $0 \notin \alpha^*$, se obtiene que

$$\int_\alpha z^n dz = 0, \ n = -2, -3, \ldots.$$

Ejemplo 2. Consideremos la curva $\alpha := c_{0,r}$, donde $r > 0$. Observemos que α es una curva cerrada de clase C^1. En el ejemplo 6.3.**??** se estableció que $\int_\alpha \frac{dz}{z} \neq 0$. Teniendo presente el lema 1, esto permite concluir que, para cualquier $s > 0$, no existe $F : D'_s(0) \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = \frac{1}{z}, \ \forall\, z \in D'_s(0)$.

Teorema 1. [de Cauchy para un triángulo] Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $p \in W$ y $f \in C(W)$. Si $f \in H(W \setminus \{p\})$ y $\Delta \subseteq W$ es un triángulo orientado, entonces $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Demostración Si los vértices de Δ son colineales, a partir del lema 6.4.1 resulta que $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Por esta razón, en adelante supondremos que esto no ocurre. Consideremos primero el caso en que $p \notin \Delta$.

Probaremos que $c := |\int_{\partial\Delta} f(z)dz|$ es 0. Sea $\epsilon > 0$. Utilizando los puntos medios de los lados del triángulo orientado Δ según se describió en el ejemplo 6.4.2 se obtienen 4 subtriángulos orientados. Denotémoslos por T_1, T_2, T_3, T_4 y tengamos presente que

$$P(T_j) = \frac{P(\Delta)}{2}, \quad \operatorname{diam}(T_j) = \frac{\operatorname{diam}\Delta}{2}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{4}$$

donde $P(T)$ indica el perímetro del triángulo T.

De acuerdo al ejemplo citado, se cumple que $\partial\Delta \sim \partial T_1 + \partial T_2 + \partial T_3 + \partial T_4$. Por lo tanto

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial T_j} f(z)dz. \tag{5}$$

Luego, $c \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial T_j} f(z)dz \right|$. De esta desigualdad se sigue que para alguno de los triángulos $T_j, j = 1, \ldots, 4$, el cual denotaremos por Δ_1, se satisface

$$c \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right|. \tag{6}$$

Repitiendo el proceso anterior, a partir de (4), (5) y (6) se obtiene una colección de triángulos orientados $\{\Delta_n\}$, con las siguientes propiedades:

1) Δ_n es compacto, no-vacío, $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) $P(\Delta_n) = 2^{-n}P(\Delta), \ \operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\Delta), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3) $c \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

De 1) y la propiedad de la intersección finita (lema 3.3.4), se sigue que existe $a \in \cap_{n=1}^{\infty} \Delta_n \subseteq \Delta \subseteq W$. Ya que f es derivable en a, es posible encontrar entonces $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(a) - f'(a)(z - a)| \leq \epsilon\, |z - a|, \ \forall\, z \in D_\delta(a). \tag{7}$$

De acuerdo con la propiedad 2), elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}\Delta_N < \delta$. Entonces, $\Delta_N \subseteq D_\delta(a)$, por lo que de (7) y 2) se sigue que

$$|f(z) - f(a) - f'(a)(z - a)| \leq \epsilon\, 2^{-N}\operatorname{diam}(\Delta), \ \forall\, z \in \Delta_N. \tag{8}$$

Notemos que (3) indica que $\int_{\partial\Delta_N}(f(a)+f'(a)(z-a))dz = 0$. Usando esto junto con la propiedad 3), iii) en el teorema 6.3.1 y (8), resulta

$$\begin{aligned} c &\le 4^N \left|\int_{\partial\Delta_N} f(z)dz\right| = 4^N \left|\int_{\partial\Delta_N}(f(z)-f(a)-f'(a)(z-a))dz\right| \\ &\le \epsilon\, 4^N 2^{-N} \mathrm{diam}\,(\Delta) 2^{-N} P(\Delta) = \epsilon\ \mathrm{diam}\,(\Delta) P(\Delta). \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ se concluye que $c = 0$.

Analizaremos ahora el caso en que p es uno de los vértices de Δ. Tomemos $M := \|f\|_{\infty,\Delta^*}$. Dado $\epsilon > 0$, observemos que podemos descomponer el triángulo ordenado Δ en tres subtriángulos orientados, τ_1, τ_2, τ_3, de manera que $p \notin \tau_1 \cup \tau_2$, $P(\tau_3) \le \frac{\epsilon}{M+1}$, y

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\tau_1} f(z)dz + \int_{\partial\tau_2} f(z)dz + \int_{\partial\tau_3} f(z)dz.$$

Por lo establecido en la primera parte de la prueba y iii) del teorema 6.3.**??**, se sigue que

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\tau_3} f(z)dz\right| \le \epsilon.$$

Haciendo $\epsilon \to 0$, se sobtiene la conclusión.

Supongamos ahora que p está en alguno de los lados de Δ. Entonces, el triángulo Δ se puede descomponer en 2 triángulos orientados, τ_1, τ_2, cada uno de los cuales tiene a p como vértice y se cumple

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\tau_1} f(z)dz + \int_{\partial\tau_2} f(z)dz. \tag{9}$$

Aplicando ahora lo establecido en el caso anterior, se obtiene la conclusión.

Resta analizar el caso en que p pertenece al interior de Δ. En esta situación, el triángulo Δ se puede descomponer en dos subtriángulos orientados, τ_1, τ_2, cada uno de los cuales tiene a p en uno de sus lados y se cumple (9). Por lo que se acaba de probar, esto implica que $c = 0$. $\square$

Notas
Clase 31, mayo 25, 2022
Fernando Galaz Fontes