Teorema 2. [de Cauchy en un abierto convexo] Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y convexo, y $p \in W$. Si $f \in C(W)$ y f es holomorfa en $W \setminus \{p\}$, entonces:

i) Existe $F \in H(W)$ tal que $F' = f$.

ii) Si α es un camino en W y α es cerrado, entonces $\int_\alpha f(z)dz = 0$.

Demostración i) Motivados por el caso de funciones de variable real, definamos

$$F(z) \ := \int_{s_{p,z}} f(w)dw.$$

La convexidad de W asegura que F está bien definida. Fijemos ahora $a \in W$, consideremos $r > 0$ tal que $D_r(a) \subseteq W$ y sea h tal que $|h| < r$. Ya que los puntos p, a y $a+h$ pertenecen a W y W es convexo, el triángulo definido por ellos está contenido en W. Por el teorema anterior, esto implica que

$$\int_{s_{p,a+h}} f(z)dz + \int_{s_{a+h,a}} f(z)dz + \int_{s_{a,p}} f(z)dz = 0.$$

Se sigue de aquí que

$$\begin{aligned} F(a+h) - F(a) - f(a)h &= \int_{s_{a,a+h}} f(w)dw - \int_{s_{a,a+h}} f(a)dw \\ &= \int_{s_{a,a+h}} [f(w) - f(a)]dw. \qquad (1) \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad de f en a, podemos encontrar $\delta \in (0, r)$ tal que $|f(w) - f(a)| \leq \ \epsilon$, $\forall\, w \in D_\delta(a)$. Empleando esto en (1), a partir de iii) en el teorema 6.3.1, se concluye que

$$|F(a+h) - F(a) - f(a)h| \ \leq \ \epsilon |h|, \ \forall\, h \in D_\delta(0).$$

Lo cual prueba que $F'(a) = f(a)$.

ii) La conclusión se sigue inmediatamente de i) y el lema 1. □

7.2. Consecuencias del teorema de Cauchy

Teorema 1. [Representación integral de Cauchy en un conjunto convexo] Sean W un conjunto abierto y convexo. Si $f \in H(W)$ y α es un camino cerrado en W, entonces

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(w)}{w - z} dw, \ \forall\, z \in W \setminus \alpha^*.$$

Demostración Fijemos $z \in W \setminus \alpha^*$ y definamos $g : W \to \mathbb{C}$ por

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z \\ f'(z), & w = z \end{cases}.$$

Observemos que g es continua y derivable en $W \setminus \{z\}$. Luego, por el teorema de Cauchy en un abierto convexo, se cumple que $\int_\alpha g(w)dw = 0$. Puesto que $g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ en α^*, se sigue que

$$\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)\int_\alpha \frac{1}{w-z}dw = 2\pi i\, f(z)\, \mathrm{Ind}_\alpha(z). \quad \square$$

Corolario 1. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f \in H(W)$. Entonces:
i) Para cada $a \in W$, la función f tiene un desarrollo en serie de potencias en el disco $D_R(a)$, donde $R = \mathrm{dist}\ (a, W^c) > 0$.
ii) La función f es localmente una serie de potencias. Por lo tanto, f tiene derivadas de todos los órdenes. En particular $f' \in H(W)$.

Demostración i) Sean $a \in W$ y $R = \mathrm{dist}\ (a, W^c)$. Notemos que $D_R(a) \subseteq W$. Tomemos r tal que $0 < r < R$, $\alpha := c_{a,r}$ y consideremos la función

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw,\ \forall\, z \in D_r(a).$$

Ya que $r = \mathrm{dist}\ (a, \alpha^*)$, del teorema 6.3.2 resulta que

$$F(z) \text{ es una serie de potencias en } D_r(a). \tag{2}$$

Por otra parte, el disco $D_R(a)$ es convexo y α es un camino cerrado en $D_R(a)$. Puesto que $\mathrm{Ind}_\alpha(z) = 1, \forall\, z \in D_r(a)$, el teorema anterior implica que $f(z) = F(z)$, $\forall\, z \in D_r(a)$. De esto y (2) se sigue que f es una serie de potencias en $D_r(a)$. Finalmente, de acuerdo a la observación 5.3.2 los coeficientes de esta serie de potencias no dependen de $r \in (0, R)$. $\square$

Observación 1.
1. Una función $f : W \to \mathbb{C}$ es holomorfa si, y sólo si, es localmente una serie de potencias. Por lo tanto una función $f \in H(W)$ tiene todas las propiedades

establecidas en la sección 5.5. En particular, satisface el teorema del módulo máximo.
2. En la prueba anterior se estableció que en $D_r(a)$, la función f tiene la representación integral

$$f(z) = F(z) = \int_{c_{a,r}} \frac{f(w)dw}{w-z},\ \forall\, z \in D_r(a).$$

Desarrollando la integral que define a F se obtiene entonces que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta,\ \forall\, r \in (0, R). \tag{3}$$

Esto nos indica que el valor $f(a)$ de una función holomorfa se puede obtener "promediando"los valores de f sobre cualquier circunferencia con centro en a y radio $r > 0$, con tal que $B_r(a) \subseteq W$.
3. En el teorema de Cauchy para un triángulo consideramos $f \in C(W)$ tal que f es derivable en $W \setminus \{p\}$, para algún $p \in W$. Se probó entonces que existe $F \in H(W)$ tal que $F' = f$. Usando ahora el teorema 1 concluimos que de hecho $f \in H(W)$.

Corolario 2. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera, entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Demostración De acuerdo al resultado anterior, basta notar que en este caso $R = \text{dist }(0, W^c) = \text{dist }(0, \emptyset) = \infty$. $\square$

El resultado siguiente es una especie de recíproco del teorema de Cauchy.

Corolario 3. [Teorema de Morera] Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f \in C(W)$. Si $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ para cada triángulo orientado $\Delta \subseteq W$, entonces $f \in H(W)$.

Demostración Tomemos $a \in W$ y escojamos $r > 0$ tal que $V = D_r(a) \subseteq W$. Entonces V es un conjunto abierto y convexo. Procediendo ahora como en la prueba del teorema 2, se obtiene una función $F : V \to \mathbb{C}$ tal que $F \in H(V)$ y $F' = f$ en V. Luego, $f \in H(V)$. Esto prueba que f es derivable en a. $\square$

Corolario 4. [Estimaciones de Cauchy] Sean $a \in \mathbb{C}, R > 0$ y $f \in H(D_R(a))$. Si $|f(z)| \leq M$, $\forall\, z \in D_R(a)$, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \;\leq\; \frac{n!}{R^n} M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Demostración Tomemos r tal que $0 < r < R$ y $\alpha = c_{a,r}$. Por la representación integral de Cauchy, se cumple

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(w)}{w-z} dw,\ \forall\, z \in D_r(a).$$

Usando el lema 6.3.2 podemos derivar bajo la integral en el miembro derecho de la igualdad anterior. Se obtiene de esta manera que

$$|f^{(n)}(a)| \leq \;\frac{n!}{2\pi} \left| \int_\alpha \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| \;\leq\; \frac{n!}{r^n} M.$$

Haciendo ahora $r \to R$, se obtiene lo afirmado. $\square$

Corolario 5. [Teorema de Liouville] Si f es una función entera y acotada, entonces f es constante.

Demostración Ya que $\mathbb{C}$ es conexo, basta probar que $f' = 0$.

Fijemos $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ en $\mathbb{C}$ y consideremos $a \in \mathbb{C}$. Empleando la estimación de Cauchy para la primera derivada, se obtiene

$$|f'(a)| \leq \;\frac{M}{R},\ \forall\, R > 0.$$

Haciendo $R \to \infty$, concluimos que $f'(a) = 0$. $\square$

El siguiente resultado indica que la derivación compleja presenta propiedades que contrastan con la derivación real.

Teorema 2. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $\{f_n\} \subseteq H(W)$ y $f : W \to \mathbb{C}$. Si $f_n \overset{cu}{\to} f$, entonces $f \in H(W)$ y $f_n^{(j)} \overset{cu}{\to} f^{(j)}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Demostración Consideremos $a \in W$, tomemos $r > 0$ de manera que $B_r(a) \subseteq W$ y sea $\alpha = c_{a,r}$. Ya que $f_n \overset{cu}{\to} f$, supondremos además que $f_n \overset{u}{\to} f$ en $B_r(a)$.

Por el lema 6.3.2, para concluir que f es derivable en a, es suficiente probar ahora que

$$f(z) = \int_\alpha \frac{f(w)}{w-z},\ \forall\, z \in D_r(a). \tag{5}$$

Por la representación integral de Cauchy, se cumple

$$f_n(z) = \int_\alpha \frac{f_n(w)}{w-z},\ \forall\, z \in D_r(a).$$

Fijemos $z \in D_r(a)$ y hagamos $n \to \infty$ en la expresión anterior. En el miembro izquierdo se obtiene $f(z)$. Por otra parte, $f_n \overset{u}{\to} f$ en α^*. Puesto que $|w-z| \geq d(z,\alpha^*) > 0, \forall\, w \in \alpha^*$, se sigue que $\frac{f_n(w)}{w-z} \overset{u}{\to} \frac{f(w)}{w-z}$ en α^*. Esto permite aplicar el corolario 6.3.1 para concluir que, cuando $n \to \infty$, el límite del miembro derecho es $\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw$. De esta manera obtenemos (5).

Para terminar la prueba estableceremos enseguida que $f_n^{(j)} \overset{u}{\to} f^{(j)}$ en $D = D_{\frac{r}{2}}(a)$. Sea $z \in D$. Entonces $D_{\frac{r}{2}}(z) \subseteq B$. Luego, teniendo presente la linealidad de la derivación y usando las estimaciones de Cauchy resulta

$$|f_n^{(j)}(z) - f^{(j)}(z)| \leq \frac{j!}{r^j}\|f_n - f\|_{\infty,B},\ \forall\, z \in D.$$

Ya que $f_n \overset{u}{\to} f$ en B, de la expresión anterior se concluye entonces que $f_n^{(j)} \overset{u}{\to} f^{(j)}$ en D. □

Observación 2. El teorema de Weierstrass señala que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es cualquier función continua, no necesariamente derivable, entonces siempre existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ tal que $P_n \overset{u}{\to} f$. El teorema anterior indica que en $\mathbb{C}$ la situación es muy diferente.

De la linealidad de la derivación se obtiene inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 6. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\{f_n\} \subseteq H(W)$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge casi uniformemente en W, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es holomorfa.

Notas
Clase 32, mayo 30, 2022
Fernando Galaz Fontes