7.3. Multiplicidad de un cero de una función holomorfa

Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. En la sección 5.5 analizamos los ceros de una función $f : W \to \mathbb{C}$ que es localmente una serie de potencias, es decir que es holomorfa, de acuerdo al corolario 2.1. Enseguida continuaremos el estudio de dichos ceros.

En la sección 5.5 establecimos que si $W \subseteq \mathbb{C}$ es una región, $f \in H(W)$ y $f \neq 0$, entonces $f^{-1}(0)$ no tiene puntos de acumulación en W. El siguiente ejemplo muestra que $f^{-1}(0)$ sí puede tener puntos de acumulación en $\mathrm{Fr}(W)$.

Ejemplo 1. Consideremos $W = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}$, $\forall\, z \in W$. Notemos que W es una región y $f \in H(W)$. Además $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Luego, $0 \in f^{-1}(0)^a$. Claramente, $f \neq 0$.

Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f \in H(W)$, $a \in W$ y $n \in I\!N_0$. El *n-ésimo polinomio de Taylor de f alrededor de a* es el polinomio P_n definido por

$$P_n(z) := f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Definamos ahora

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - P_n(z)}{(z-a)^{n+1}}, & z \neq a \\ \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}, & z = a \end{cases}. \tag{1}$$

Claramente, g es derivable en $W \setminus \{a\}$. Veamos que g también es derivable en a. Para ello tomemos $r > 0$ tal que $D_r(a) \subseteq W$. De acuerdo al corolario 2.1, f se representa por su serie de Taylor alrededor de a. Así, se cumple

$$f(z) = P_n(z) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{(n+1)} + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^{n+2} + \cdots\,,\ \forall\, z \in D_r(a).$$

Por consiguiente

$$f(z) - P_n(z) = (z-a)^{(n+1)} h(z),\ \forall\, z \in D_r(a), \tag{2}$$

donde

$$h(z) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2}(a)}{(n+2)!}(z-a) + \cdots\,,\ \forall\, z \in D_r(a). \tag{3}$$

Puesto que h es una serie de potencias alrededor de a que es convergente en $D_r(a)$, el corolario 5.4.1 indica que h es derivable en a, en particular h es continua ahí. De la igualdad (2) resulta entonces que

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-P_n(z)}{(z-a)^{n+1}} = \lim_{z\to a} h(z) = h(a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Esto muestra que $h(a) = g(a)$. Por otra parte, de (2) es claro que $h(z) = g(z)$ si $z \in D'_r(a)$. Luego $g = h$ es derivable en a.

El siguiente resultado es una recapitulación del desarrollo anterior.

Lema 1. *Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $f \in H(W)$ y $a \in W$. Entonces, para cada $n \in I\!N_0$, existe $g \in H(W)$ tal que $g(a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$ y*

$$f(z) = P_n(z) + (z-a)^{n+1} g(z),\ \forall\, z \in W.$$

Definición 1. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto $f \in H(W)$ y $a \in W$ tal que $f(a) = 0$. Diremos que a tiene *multiplicidad finita*, si existen $m \in \mathbb{N}$ y $g \in H(W)$ tal que $g(a) \neq 0$ y

$$f(z) = (z-a)^m g(z),\ \forall\, z \in W. \tag{5}$$

Más adelante veremos que, cuando existe, tal m es único y lo llamaremos *multiplicidad* de a. Cuando $m = 1$ indicaremos que a es un *cero simple* (o *raíz simple*).

Proposición 1. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f \in H(W)$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces $a \in W$ tiene multiplicidad m si, y sólo si, $0 = f(a) = \cdots = f^{m-1}(a)$ y $f^m(a) \neq 0$.

Demostración Supongamos que se cumple (5), donde $m \in \mathbb{N}$ y $g(a) \neq 0$. Claramente $f(a) = 0$. Fijemos $r > 0$ tal que $D_r(a) \subseteq W$ y consideremos el desarrollo de g en serie de potencias alrededor de a. En virtud de (5), este desarrollo de g proporciona un desarrollo para f donde los coeficientes de las potencias $(z-a)^0, \ldots, (z-a)^{m-1}$ son 0 y el de $(z-a)^m$ es $g(a)$. Usando ahora el corolario 5.4.1 resulta que $f(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0,\ f^{(m)}(a) = m!g(a) \neq 0$.

Supongamos ahora que $0 = f(a) = ... = f^{m-1}(a)$ y $f^m(a) \neq 0$. Del lema anterior obtenemos ahora $g \in H(W)$ tal que $g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$ y $f(z) = P_{m-1}(z) + g(z)(z-a)^m = g(z)(z-a)^m$. $\square$

Observación 1. Del resultado anterior podemos notar que la multiplicidad de un cero de una función holomorfa, cuando existe, está bien definida.

Corolario 1. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f \in H(W)$. Si $f \neq 0$, entonces, todo cero de f tiene multiplicidad.

Demostración Sea $a \in W$ tal que $f(a) = 0$. Para concluir que a tiene multiplicidad usaremos la proposición anterior. Si $f^k(a) = 0, \forall\, k \in \mathbb{N}$, al considerar el desarrollo de f en serie de potencias alrededor de a, resulta que $f = 0$ en un disco abierto $D_r(a) \subseteq W$. Siendo W conexo, el teorema 5.5.1 implica que $f = 0$. $\square$

7.4. Singularidades aisladas

Definición 1. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f \in H(W)$.

a) Si $a \in \mathrm{Fr}W$, diremos que a es una *singularidad* de f.

b) Una singularidad a de f es *aislada*, si existe $r > 0$ tal que $D'_r(a) \subseteq W$.

c) Si a es una singularidad aislada de f y f puede extenderse a $W \cup \{a\}$ de manera que la extensión resultante sea derivable en a, diremos que tal singularidad es *removible*.

Observación 1. Supongamos que $W \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto y a es una singularidad aislada de $f \in H(W)$.
1) Elijamos $r > 0$ de manera que $D'_r(a) \subseteq W$. Luego

$$W \cup \{a\} = W \cup D'_r(a) \cup \{a\} = W \cup D_r(a)$$

es abierto.
2) Supongamos que a es una singularidad removible de f y sea F una función holomorfa en $W \cup \{a\}$ tal que $F = f$ en W. Tal F es única, pues

$$F(a) \;=\; \lim_{z \to a} F(z) \;=\; \lim_{z \to a} f(z).$$

En esta situación, cuando se habla del valor de f en a, debe entenderse que en realidad éste se trata de $F(a)$.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$, definida en $W = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Notemos que $a = 0$ es una singularidad aislada de f. Veamos que se trata de una singularidad removible.

Ya que $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\operatorname{sen}'(0) \neq 0$, concluimos que 0 es una raíz simple de sen. Luego, podemos expresar $\operatorname{sen} z = z\, g(z)$, siendo h una función entera tal que $h(0) \neq 0$. Se sigue entonces que $f = g$ en W y, por lo tanto, 0 es una singularidad removible de f.

Lema 1. *Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f \in H(W)$ y a una singularidad aislada de f. Entonces a es una singularidad removible si, y sólo si, existe $r > 0$ tal que $D_r'(a) \subseteq W$ y f es acotada en $D_r'(a)$.*

Demostración Consideremos primero que existe $r > 0$ tal que $D_r'(a) \subseteq W$ y f es acotada en $D_r'(a)$. Para proponer la extensión de f procedemos indirectamente, de la forma siguiente. Definimos

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & z \in W \\ 0, & z = a \end{cases} . \tag{1}$$

Claramente, $g \in H(W)$. Observando que

$$\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = (z-a) f(z), \ \forall\, z \in W$$

y teniendo presente que f es acotada en $D_r'(a)$, resulta $g'(a) = 0$. Luego, $g \in H(W \cup \{a\})$. Puesto que $g(a) = g'(a) = 0$, haciendo uso del lema 3.1, encontramos $F \in H(W \cup \{a\})$ tal que

$$g(z) = (z-a)^2 F(z), \ \forall\, z \in W \cup \{a\}. \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue que $f = F$ en W. Esto prueba que a es una singularidad removible de f.

Supongamos ahora que a es una singularidad removible de f. Entonces existe $F \in H(W) \bigcup \{a\}$ tal que $f = F$ en W. Tomemos $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq W \cup \{a\}$. Ya que F es continua en el conjunto compacto $B_R(a)$, es acotada ahí. Luego, también lo es f. $\square$

Definición 2. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f \in H(W)$ y a una singularidad aislada de f. Si existen $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ y $h \in H(W \cup \{a\})$,tales que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} + h(z), \ \forall\, z \in W, \tag{3}$$

diremos que a es un *polo* de f y que su *orden* es m.

Continuando en el contexto de la definición anterior, introduzcamos el polinomio $P(y) = c_1 y + \cdots + c_m y^m$. Entonces, a la función

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} \; = \; P((z-a)^1), \; \forall\, z \neq a, \tag{4}$$

se le llama la *parte principal de* f *en* a. Ya que $|P(y)| \to \infty$ si $|y| \to \infty$, resulta que $|P((z-a)^{-1})| \to \infty$, cuando $z \to a$. Por (3), esto implica que

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \; \infty. \tag{5}$$

De aquí podemos concluir que un polo no es una singularidad removible.

Lema 2. *Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f \in H(W)$, a una singularidad aislada de f y $m \in \mathbb{N}$. Entonces, a es un polo de f de orden m si, y sólo si,*

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m \textit{ existe y es distinto de cero.} \tag{6}$$

Demostración Supongamos primero que a es un polo de orden $m \in \mathbb{N}$ y expresemos f como en (3). Resulta entonces que

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m = c_m \neq 0.$$

Supongamos ahora que se cumple (6). Notemos que entonces la función definida por $z \to f(z)(z-a)^m$ tiene una singularidad aislada en a y es acotada en $D'_r(a)$, para algún $r > 0$. Por el lema 1, esto implica que existe $g \in H(W \cup \{a\})$ tal que $(z-a)^m f(z) = g(z)$, $\forall\, z \in W$. Además $g(a) = \lim_{z \to a}(z = a)^m f(z) \neq 0$. Usando enseguida el lema 3.1 encontramos $h \in H(W \cup \{a\})$ tal que

$$g(z) = g(a) + \cdots + \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m h(z), \; \forall\, z \in W \cup \{a\}.$$

Se sigue entonces que

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!(z-a)^{-1}} + h(z), \; \forall\, z \in W.$$

Ya que $g(a) = \lim_{z \to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$, de la igualdad anterior concluimos que a es un polo de f de orden m. $\square$

Observación 2. Sigamos bajo las hipótesis del resultado anterior.
i) Consideremos $k \in \mathbb{N}$. A partir de (6) resulta entonces que

$$\lim_{z\to a} |(z-a)^k f(z)| = \infty \text{ si } k < m, \ \lim_{z\to a} |(z-a)^k f(z)| = 0 \text{ si } k > m.$$

Esto permite concluir que el orden de un polo está bien definido.
ii) De (3) se obtiene que

$$g(z) = (z-a)^m f(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k} + (z-a)^m h(z), \forall\, z \in W.$$

Luego

$$c_m = g(a),\ c_{m-1} = g'(a), \ldots, c_1 = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}. \tag{7}$$

Esto indica que los números $c_1, \ldots, c_m$ que aparecen en (3) son únicos.

Notas
Clase 32, mayo 30, 2022
Fernando Galaz Fontes