VARIABLE COMPLEJA: EXAMEN FINAL

Sólo hay que resolver 8 de los 9 ejercicios

Duración: 3 horas

(**Desarrrolla primero los ejercicios que consideres más accesibles**)

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados n puntos distintos $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$, prueba que existe un único polinomio P de grado $n-1$ tal que $P(a_1) = 1$ y $P(a_j) = 0$ si $j \in \{2, \ldots, n\}$.

2. Determina si el conjunto $W = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ es una región. Justifica tu respuesta.

3. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in W$, $f \in H(W)$ y $f(a) \neq 0$. Entonces la función $g := \frac{1}{f}$ está definida y es holomorfa en un disco abierto alrededor de a. Si $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots$ alrededor de a, prueba que $g(z) = \dfrac{1}{c_0} - \dfrac{c_1}{c_0^2}(z-a) + \cdots$, alrededor de a.

4. Calcula $\int_\alpha (z^3 - z^2 + (1-i))dz$, donde α es el camino definido como sigue: Empieza con el segmento que va del origen a i y sigue por el arco de la circunferencia con centro en el origen, radio 1 y orientada en el sentido de las manecillas del reloj, hasta llegar al punto 1.

5. Determina si existe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = \overline{z}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

6. Encuentra $\sup\{|z^2 + z| : z = ti - s, s, t \in [0,1]\}$. (Sug.: considera el principio del módulo máximo.)

7. Determina si la función sen es acotada (en $\mathbb{C}$). Justifica tu respuesta.

8. Sean $W := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ y $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}, \forall\, z \in W$. Prueba:
i) f está bien definida.
ii) f es holomorfa.

9. Sean f una función entera y P un polinomio no-constante.
i) Prueba que los puntos donde $g = \frac{f}{P}$ no está definida son singularidades aisladas.
ii) Da un ejemplo de un caso donde la singularidad sea removible y otro donde sea un polo.

Junio 17, 2022