VARIABLE COMPLEJA: EXAMEN PARCIAL 3

Sólo hay que resolver 5 de los 6 ejercicios

Duración: 2 horas

(**Desarrrolla primero los ejercicios que consideres más accesibles**)

1. Sea $a \in \mathbb{C}$. Prueba que una función entera f es solución de la ecuación diferencial $y' + ay = 0$ si, y sólo si, $f(z) = ce^{-az}$, para algún $c \in \mathbb{C}$.

2. Sea P un polinomio (complejo). Prueba que los coeficientes de P son reales si, y sólo si, $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

3. Sean $w, z \in \mathbb{C}$ y $S = \{(1-t)w + tz : 0 \leq t \leq 1\}$. Dado $y \in \mathbb{C}$, prueba que $\sup\{|y-x| : x \in S\} = \text{máx}\{|y-w|, |y-z|\}$.

4. Sean $\{r_n\} \subseteq (0,1)$ una sucesión convergente a 1 y $\alpha_n = c_{0,r_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha = c_{0,1}$. Prueba que $\int_{\alpha_n} f(z)dz \to \int_\alpha f(z)dz, \forall\, f \in C(B_1(0))$.

5. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)^n z^n$ y α la curva cuya trayectoria es la poligonal (orientada) que va del punto $\frac{-1}{3}$ a $\frac{i}{3}$ y de éste a $\frac{1}{3}$. Prueba que $\int_\alpha f(z)dz$ está bien definida y calcula su valor. (Sug.: Observa que f determina una función holomorfa.)

6. Expresa la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z - 2}$ como una serie de potencias alrededor de $z = 0$.

Junio 10, 2022