VARIABLE COMPLEJA: TAREA 11

1. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $A \subseteq W$ es tal que $A \cap K$ es finito, para cada conjunto compacto $K \subseteq W$, prueba que A es numerable.

2. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Si $x \in A$ y $y \in A^c$, prueba que $[x, y] \cap \mathrm{Fr}A \neq \phi$.

3. (Véase el ejercicio 9.7.) Si $A \subseteq \mathbb{C}$ es acotado, prueba que A^c tiene exactamente una componente conexa que no es acotada.

4. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ es acotado y tiene una infinidad de elementos, prueba que $A^a \neq \phi$.

5. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f, g : W \to \mathbb{C}$ funciones con derivadas hasta de orden n. Prueba la fórmula de Leibniz para la n-ésima derivada del producto:

$$(fg)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z), \ \forall\, z \in W.$$

Definición Dados $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{C}$, definimos $a^b := e^{b \operatorname{Log} a}$.

6. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calcula la derivada de $f(z) = a^z, \forall\, z \in \mathbb{C}$.

7*. Si los ceros de un polinomio P están sobre una recta, prueba que también lo están los de P'.

8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f \in H(\Omega)$. Si $\operatorname{Re} f$ es constante, prueba que f es constante.

9. Determina si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge uniformemente en el intervalo $[-1, 1]$. (Sug.: encuentra la función límite.)

10. (Criterio de Cauchy, o de la raíz n-ésima, para convergencia uniforme.) Sea $f_n : D \to \mathbb{C}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si existe $r \in [0, 1)$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{\|f_n(z)\|} \leq r, \ \forall\, n \geq N, \ \forall\, z \in D,$$

prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente. (Nota que tomando cada f_n constante, se obtiene el criterio para series numéricas.)

11. Señala sucesiones acotadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

12. Encuentra el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Para entregarse el viernes 29 de abril, 2022.
Segundo examen parcial: lunes 2 de mayo, 4 PM.

SUGERENCIAS

7*. Trata de usar el ejercicio 10.7.