VARIABLE COMPLEJA: TAREA 12

1. Encuentra $\lim_{z\to 0} z \operatorname{Log} z$, donde Log es la función logaritmo principal.

2. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ es no-vacío, prueba que $\operatorname{dist}(x, A^c) = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Fr}A),\ \forall\, x \in \mathbb{C}$.

3. Sean $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$. Prueba que $D_r'(a)$ es arco-conexo.

4. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ es no-numerable, prueba que $A^a \neq \phi$.

5. Dado $a \in \mathbb{C}$, calcula la derivada de $f(z) = z^a, \forall\, z \in D_A$.

6. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ y $f : W \to \mathbb{C}$. Si W es una región y $f' = f$, prueba que $f(z) = ce^z$, para algún $c \in \mathbb{C}$.

7. Si $f \in H(\Omega)$, Ω es una región y $|f|$ es constante, prueba que f es constante.

8. (Criterio de D'Alembert, o del cociente, para convergencia uniforme) Sea $f_n : D \to \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq 0,\ \forall\, x \in D, n \in \mathbb{N}$. Si existe $r \in [0, 1)$ tal que $\frac{\|f_{n+1}(x)\|}{\|f_n(x)\|} \leq r,\ \forall\, n \in N,\ \forall\, x \in D$ y f_1 es acotada, prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente. (Nota que tomando cada f_n constante se obtiene el criterio para series numéricas.)

9. Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto compacto, $f_n : K \to \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $f : K \to \mathbb{C}$. Si cada función f_n es continua, $f_n \xrightarrow{u} f$ y cada f_n tiene un cero en K, prueba que f también lo tiene.

10. Sea $f_n(z) = e^{-n^2\pi^2 y + \pi n i x}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, z = x + iy$. Sea D el conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ existe.
i) Encuentra D.
ii) Prueba que $g : D \to \mathbb{C}$ es continua.

11. Determina si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en D_1.

12. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y tomemos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \forall\, z \in D_R$. Prueba que $c_n \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in N_0$, si, y sólo si, $f(x) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \cap D_R$.

Para entregarse el lunes 9 de mayo, 2022