VARIABLE COMPLEJA: TAREA 13

1. Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto no-vacío y $x \in \mathbb{C}$. Prueba:
i) Si $0 < r < \text{dist}(x, A)$, entonces $A \cap D_r(x) = \phi$.
ii) Si $\text{dist}(x, A) < r$, entonces $A \cap D_r(x) \neq \phi$.

2. Sea $R > 0$ y supongamos que $K \subseteq V_R(0) \subseteq \mathbb{C}$. Si K es compacto, prueba que existe r tal que $0 < r < R$ y $K \subseteq V_r(0)$.

3*. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función que es derivable en $z = 0$, $f'(0) = 1$, y cumple $f(w + z) = f(w)f(z),\ \forall\, w, z \in \mathbb{C}$. Prueba que $f(z) = e^z,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

4. Sean D un conjunto y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n, g_n : D \to \mathbb{C}$ funciones acotadas. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente, prueba que $\{f_n g_n\}$ también.

5*. Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 1$, definamos $\zeta(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. Prueba que ζ es continua. (La función ζ es llamada función *zeta de Riemann*.)

6. (Criterio de Dirichlet para convergencia uniforme) Sean $f_n : D \to \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de números no-negativos que converge a 0. Si existe $C > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{m} \|f_n(x)\| \leq C,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in D$, prueba que la serie $\sum_{n=1}^{m} a_n f_n(x)$ converge uniformemente.

7. Calcula el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\ z^n$.

8*. Calcula $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

9. Expresa $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ como serie de potencias alrededor de 0.

10. Sean D un conjunto arbitrario y $f, g : D \to \mathbb{C}$. Prueba:
i) $\|f\|_\infty = 0$ si, y sólo si, $f = 0$.
ii) $\|f + g\|_\infty \ \leq\ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
iii) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$.

11. Considera la curva $\alpha(t) = (t|t|, t^2),\ \forall\, t \in [-1, 1]$. Prueba que α es de clase C^1 y encuentra su trayectoria.

12*. Definamos $y(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{1}{t}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ y $\alpha(t) = (t, y(t)),\ \forall\, t \in [0, 1]$. Verifica que α es una curva que no es rectificable.

Para entregarse el martes 17 de mayo, 2022

SUGERENCIAS

3*. Prueba primero que $f' = f$.

5*. Prueba que la serie de funciones converge uniformemente en cada 'semi-plano' $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$, donde $a > 1$.

8*. Ten presente que $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$.

12*. Considera la sucesión definida por $t_k = \frac{2}{k)\pi}, k \in \mathbb{N}$ y analiza la longitud de α restringida al intervalo $[t_k, 1]$