VARIABLE COMPLEJA: TAREA 14

Notación Indicaremos por $\Delta(x,y,z)$ el triángulo de vértices $x,y,z \in \mathbb{C}$.

1. Sean $a,b,c \in \mathbb{C}$. Si $W \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y $\Delta(a,b,c) \subseteq W$, prueba que existe $\delta > 0$ tal que si $x,y,z \in \mathbb{C}$ y $|x-a| < \delta, |y-b| < \delta, |z-c| < \delta$, entonces $\Delta(x,y,z) \subseteq W$.

Definición Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Para $f : W \to \mathbb{C}$ de clase C^1 definamos los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ por $\partial f := \frac{1}{2}[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}]$ y $\overline{\partial} f := \frac{1}{2}[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}]$.

2. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : W \to \mathbb{C}$ de clase C^1. Prueba:

i) f es holomorfa si, y sólo si, $\overline{\partial} f = 0$.

ii) Si f es holomorfa, entonces $\partial f = f'$.

3. Encuentra una función entera con parte imaginaria $v(x,y) = x^2 - y^2 + x$.

Definición Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Una sucesión $\{g_n\} \subseteq F(W, \mathbb{R}^\jmath)$ es *localmente uniformemente acotada*, si para cada $a \in W$ existe $r > 0$ tal que la sucesión $\{g_n\}$ es uniformemente acotada en $D_r(a) \subseteq W$.

4. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\{f_n\} \subseteq C(W)$. Si $\sum_{n=1}^\infty c_n$ es una serie convergente de términos positivos tal que $\left\{\dfrac{f_n}{c_n}\right\}$ es localmente uniformemente acotada, prueba que $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ define una función continua.

Definición El producto (de Cauchy) de las series complejas $\sum_{n=0}^\infty a_n$ y $\sum_{n=0}^\infty b_n$ es la serie $\sum_{n=0}^\infty c_n$, donde $c_n = \sum_{k=0}^n a_j b_{n-j}$.

5*. Si las series complejas $\sum_{n=0}^\infty a_n$ y $\sum_{n=0}^\infty b_n$ convergen absolutamente, prueba que su producto $\sum_{n=0}^\infty c_n$ también.

Definición El *conjunto de convergencia* de una serie de funciones $\sum_{n=1}^\infty f_n$, consiste de todos aquellos $z \in \mathbb{C}$ donde $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ converge.

6. Considerando las series de potencias $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$ y $\sum_{n=1}^\infty z^{n-1}$ concluye que, aunque tienen igual radio de convergencia, los conjuntos de convergencia de una serie y de su serie derivada pueden ser distintos.

7. Sean α_1, α_2 y α_3 curvas en $\mathbb{C}$ tales que α_2 le sigue a α_1 y α_3 le sigue a α_2. Prueba que $(\alpha_1 \dot{+} \alpha_2) \dot{+} \alpha_3 = \alpha_1 \dot{+} (\alpha_2 + \alpha_3)$.

8. Prueba que $\ell(\alpha_{\text{op}}) = \ell(\alpha)$, para cualquier curva α en $\mathbb{C}$.

9*. Sean $a, c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y $P(z) = a_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Dado $r > 0$, encuentra $\int_{-\pi}^{\pi} |P(a + re^{i\theta})|^2 d\theta$.

10. Calcula $\int_\alpha (z^3 + iz^2 - 3)dz$, siendo α la curva definida por el arco de la parábola $y = x^2$ que va del origen a $1+i$ y el segmento que va de $1+i$ a $3+i$.

11. Calcula $F'(a)$, si $F(z) := \displaystyle\int_{c_{a,r}} \frac{(\text{Re } w + \text{Im } w)dw}{w - z}, \forall\, z$ tal que $|z-a| \neq r$.

12. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado. Dado $c \in (a,b)$, definamos $\beta : [c, c+b-a] \to \mathbb{C}$ por $\beta(s) := \begin{cases} \alpha(s), & c \leq t \leq b \\ \alpha(a+s-b), & b \leq b+(b-a) \end{cases}$. Prueba que $\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz,\ \forall\, f \in C(\alpha^*, \mathbb{C})$. (Nota que esto indica que la integral sobre una curva cerrada de clase C^1P no depende del punto inicial.)

Para entregarse el miércoles es 25 de mayo

SUGERENCIAS

5*. Considera series de potencias.

9*. Ten presente que $|a|^2 = a\overline{a}, a \in \mathbb{C}$.