VARIABLE COMPLEJA: TAREA 15

1. Prueba que el producto de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ consigo misma diverge.

2. Prueba que las condiciones i)-iv) señaladas en el ejercicio 9.12 determinan a las funciones cos y sen. Es decir, prueba que si c y s son funciones enteras que cumplen i)-iv), entonces $c = \cos$ y $s = \operatorname{sen}$.

3. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Prueba:

i) Los operadores ∂ y $\bar{\partial}$ son $\mathbb{C}$-lineales.

ii) $\partial(fg) = (\partial f)g + f\partial g,\ \bar{\partial}(fg) = (\bar{\partial} f)g + f\bar{\partial} g,\ \forall\, f, g \in C^1(W, \mathbb{C})$.

Definición Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto.

a) Entonces $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, para cualquier $f \in C^2(W, \mathbb{C})$. A Δ se le llama el operador *laplaciano* (en W).

b) Una función $f \in C^2(W, \mathbb{C})$ es *armónica* si $\Delta f = 0$.

4. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : W \to \mathbb{C}$ es de clase C^2, prueba que $\Delta f = 4\partial\bar{\partial} f$.

5. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f \in H(W)$, prueba que f es armónica.

6. Sea α una curva definida en $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Reparametriza la trayectoria de α mediante una curva definida en $[0, 1]$, sin cambiar su "orientación".

7. Prueba que $s_{a,b} \dot{+} s_{b,c} \dot{+} s_{c,a} \sim s_{b,c} \dot{+} s_{c,a} \dot{+} s_{a,b}, \forall\, a, b, c \in \mathbb{C}$.

8. Sean $W \subseteq \mathbb{C}, \alpha : [a, b] \to W$ un camino y $f \in C(\alpha^*)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n} < b - a$, sea α_n la restricción de α al intervalo $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Prueba que $\int_{\alpha_n} f(z)dz \to \int_{\alpha} f(z)dz$.

9. Para $a \neq 0$, definamos $f(z) = \frac{1}{a-z}, \forall\, z \neq a$. Prueba que f es localmente una serie de potencias en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

10*. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $a \neq b$, y $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)},\ z \neq a, z \neq b$. Prueba que f es localmente una serie de potencias en $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.

11. Sea $R > 0$ y supongamos que $f : (B_R(0))^c \to \mathbb{C}$ es continua. Para cada $r > R$ sea α_r la curva orientada cuya trayectoria es la semicircunferencia con centro en el origen y que va de $(r, 0)$ a $(-r, 0)$. Si $\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$, prueba que $\lim_{r\to\infty} \int_{\alpha_r} f(z)dz = 0$.

12. Sea Δ el triángulo ordenado de vértices a, b, c. Si estos vértices son colineales, prueba que $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0, \forall\, f \in C(\Delta^*)$.

Para entregarse el miércoles 1 de junio, 2022

SUGERENCIAS

10*. Expresa $f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$.