VARIABLE COMPLEJA: TAREA 16

Definición Una función F es *extensión* de una función f, si $D(f) \subseteq D(F)$ y $f(z) = F(z),\ \forall\, z \in D(f)$.

1. Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, con radio de convergencia $R > 0$ y sea f su función asociada, la cual está definida en su conjunto de convergencia. Supongamos que $W \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y $F : W \to \mathbb{C}$ es una extensión holomorfa de f. Prueba que $B_R(0)$ no está contenido en W.

2. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f \in H(W)$, prueba que $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son de clase C^∞.

3. Sea D el dominio de log, la función logaritmo principal. Si $a \in D$, desarrolla log alrededor de a e indica en dónde es válido dicho desarrollo.

4. Sea $f(z) = \frac{1}{1-z},\ \forall\, z \in D_1(0)$. Encuentra $F : D_1(0) \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f$.

5. Prueba que $e^{2tz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} z^n, \forall\, t, z \in \mathbb{C}$, donde H_n es un polinomio de grado n.

6. Si P es una función entera que cumple la desigualdad del ejercicio 9.6, prueba que P es un polinomio de grado menor o igual que n.

7*. Si f es una función entera y f no es constante, prueba que su rango $f(\mathbb{C})$ es denso.

8. Tomemos $\mathbb{D} := D_1$ y sean $f, g \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Si $f = g$ en $\operatorname{Fr}\mathbb{D}$ y $f, g \in H(\mathbb{D})$, prueba que $f = g$.

9. Encuentra $\|f\|_{\infty,\Delta}$, siendo $f(z) := z^2 - 1, \forall\, z \in \mathbb{C}$ y Δ el tríangulo cuyos vértices son los puntos $0, 2, i$.

10. Sea $W := \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ y definamos $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2},\ \forall\, z \in W$. Prueba:

i) f está bien definida. ii) f es holomorfa.

11*. Si g es una función entera y $g(z) \neq 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$, prueba que existe una función entera h tal que $e^{h(z)} = g(z),\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

12. Sea P un polinomio. Si a es una raíz de P con multiplicidad m, encuentra el orden de a como polo de $\frac{1}{P}$. Justifica tu respuesta.

Para entregarse el miércoles 8 de junio, 2022.
Tercer examen parcial: viernes 10 de junio, 12:30 pm.

SUGERENCIAS

7*. Si $a \neq f(z), \forall\, z \in \mathbb{C}$, considera la función $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$.

11*. Observa que existe una función entera f tal que $f' = \dfrac{g'}{g}$.