Algebra Superior, 11.11.99

Tarea num. 13

Para entregar el 18 de nov. 99

1. (a) ¿Qué número representa la fracción continua $[2, 1, 2, 1, 2, 1, \cdots]$?
   (b) Calcula la expansión en fracción continua de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $b_0, b_1, \ldots, b_n$ enteros positivos. ¿Cuáles son las condiciones para que
$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] < [b_0, b_1, \cdots, b_n]?$$
3. ¿Qué relación hay entre $[a_0, a_1]$ y $[a_1, a_0]$? ¿Y entre $[\overline{a_0, a_1}]$ y $[\overline{a_1, a_0}]$? Generaliza.
4. Usa el "Lema" visto en clase para probar que si una fracción continua es periódica entonces es una raíz irracional de un polinomio de grado 2 (el recíproco es cierto, pero un poco más difícil de probar).
5. Sea $\xi = [1, 1, 1, \cdots]$, y sea $\frac{p_n}{q_n}$ el n-ésimo convergente. Prueba que $q_n = x_n$ y $p_n = x_{n+1}$ donde $\{x_n\}$ es la sucesión de Fibonacci
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$
definida recursivamente por $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n \geq 1$. Concluye que
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

PILÓN: Calcula la expansión en fracción continua de $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.