Algebra Superior, 25.11.99

Tarea num. 14

Para entregar el 2 de dic. 99

Referencia: el libro de Niven y Zuckerman, "An Introduction to the Theory of Numbers", en reserva en la bibilioteca.

1. Encontrar a todos los números de Farey de orden n en el intervalo $[0,1]$ para $n = 1, 2, \ldots, 7$, y marcarlos en el plano de coordenadas (la fracción a/b marcada como el punto (b, a).)

   Recordando: Los números de Farey de orden n son todas las fracciones a/b con $|b| \leq n$, ordenados en orden creciente.

2. (a) Sean $a/b, a'/b', a''/b''$ tres números consecutivos de Farey de orden n. Demeustra que $a'/b' = (a + a'')/(b + b'')$.

   (b) Encuentra una interpretación geométrica del último inciso. (Sugerencia: considera los tres puntos correspondientes en el plano).

3. (a) Sean a/b y a'/b' dos fracciones tal que $ab' - ba' = 1$ y $b, b' > 0$. Demuestra que a/b y a'/b' estan en forma reducida (i.e. $(a, b) = (a', b') = 1$) y que son dos número consecutivos de Farey de orden n, donde $n = \max\{b, b'\}$.

   (b) Encuentra una interpretación geométrica del último inciso. (Sugrencia: considerar el area del paralelogramo cuyos vertices son $(0, 0), (b, a), (b', a'), (b + b', a + a')$.)

   (c) Es cierto el converso del inciso (a)? i.e. que cualquier dos numeros consecutivos de Farey a/b y a'/b' (en forma reducida) satisfacen $ab' - ba' = 1$?

4. Sea $D_n = \{r' - r \mid r, r' \text{ son dos números consecutivos de Farey de orden } n\}$. Demuestra que

$$\min D_n = \frac{1}{n(n-1)}, \qquad \max D_n = \frac{1}{n}.$$

5. Demostrar que el número de números de Farey de orden n en el intervalo $[0,1]$ es $1 + \phi(1) + \phi(2) + \ldots + \phi(n)$.