Algebra Superior, 19.8.99

Tarea num. 3

1. En cada uno de los siguientes incisos definimos un conjunto A y una relación $R \subset A \times A$. En cada caso hay que decidir si la relación es reflexiva, simétrica, o transitiva. En caso que la relación es de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva) describir las clases de equivalencia $[x] = \{y \in A \mid (x, y) \in R\}$.

   (a) $A = \mathbb{Q}$, $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$.
   (b) $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(d, n) \mid d \neq 0, \frac{n}{d} \in \mathbb{Z}\}$.
   (c) $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(m, n) \mid \frac{m-n}{8} \in \mathbb{Z}\}$.
   (d) $A = \mathbb{Q}$, $R = \{(x, y) \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$.
   (e) $A = \mathbb{Q}$, $R = \{(x, y) \mid xy = 1\}$.
   (f) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid (x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2\}$.
   (g) $A =$ todas las lineas en el plano, $R = \{(l_1, l_2) \mid l_1$ y l_2 son paralelos $\}$.
   (h) Sea $f : A \to B$ qualquier función y $R = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$.

2. Sean $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Definimos $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

   (a) Calcular los números $\binom{n}{k}$ para todo los k, n en el rango $0 \leq k \leq n \leq 5$, y arreglarlos en el "triángulo de Pascal":

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \text{etc.} & & & \end{array}$$

   (b) Demostrar que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, para todo $1 \leq k \leq n-1$, y interpretar en términos del triángulo de Pascal.
   (c) Demostrar que $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.
   (d) Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
   (e) Sean $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Sea A un conjunto finito con n elementos y definimos $P_k(A) := \{B \subset A \mid \#B = k\}$. Demostrar que $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$.

3. * Invité 7 personas a una cena. Despues de acabar de introducirnos todos, pregunté a cada uno de mis 7 invitados con cuantas personas de los presentes apretó la mano. Resulta que obtuve 7 respuestas distintas y que todos apretaron la mano por lo menos una vez. ¿Con cuantas personas apreté yo la mano?