Tarea núm. 3

Para entregar el 9 de sept 99

1. Sea $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Encuentra un polinomio $q(x)$ de grado ≤ 2 y un número real c tales que $p(x) = c + (x-1)q(x)$.

   (Sugerencia: ver el siguiente inciso).

2. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado $\leq n$; i.e. $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales. Demuestra que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado $\leq n-1$ con coeficientes reales tal que $p(x) = p(x_0) + (x - x_0)q(x)$.

   (Sugerencia: al sustituir $x = y + x_0$ en la expresión para $p(x)$ se obtiene un polinomio en y, digamos $p(x) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_n y^n = c_0 + y[Q(y)]$; luego sustituir de regreso $y = x - x_0$.)

3. Demostrar que si un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tiene una infinidad de raices entonces $p(x) = 0$. (Nota: $p(x) = 0$ significa que todos sus coeficientes se anulan). En otras palabras, si $p(x) \neq 0$ entonces el conjunto $\{a \in \mathbb{R} \mid p(a) = 0\}$ es finito.

   (Sugerencia: usar inducción sobre n. Para el paso de la inducción usar el inciso anterior: si $p(x)$ tiene a los números $x_0, x_1, \ldots$ como raices, entonces $p(x) = (x - x_0)q(x)$ donde $q(x)$ es un polinomio de grado $\leq n-1$ y tiene a los números $x_1, x_2, \ldots$ como raices.)

4. Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ dos polinomios que satisfacen $p(a) = q(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que $p(x)$ y $q(x)$ tienen los mismos coeficientes, salvo posiblemente coeficientes que se anulan; es decir, si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$ y digamos $m \geq n$, entonces $a_k = b_k$ para $0 \leq k \leq n$, y si $m > n$ entonces $b_k = 0$ para $n < k \leq m$.

   (Sugerencia: aplicar el inciso anterior al polinomio $p(x) - q(x)$.)