Algebra Superior, 9.9.99

Tarea num. 6

Para entregar el 23 de sept. 99

1. Sea b un número natural mayor que 1. Demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe una única sucesión finita $x_0, x_1, \ldots, x_k$, tal que $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, $0 \leq i \leq k$, y

$$n = x_k b^k + x_{k-1} b^{k-1} + \ldots + x_1 b + x_0.$$

(Sugerencia: por inducción. Considera la sucesión aritmética infinita $0, b, 2b, 3b, \ldots$. Existe entonces un $N \in \mathbb{N}$ tal que $Nb \leq n < (N+1)b$, i.e. $n = Nb + x_0$, donde $x_0 \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Aplica ahora la suposición de la inducción a N. No se te olvide la unicidad.)

Terminología: a la sucesión $x_k\, x_{k-1}\, \ldots\, x_1$ (sin comas) del último ejercicio se llama la representación (o el desarrollo) de n en la base b. A los x_i se llama los dígitos de la representación. Ejemplo: en la base $b = 5$ hay 5 dígitos: 0,1,2,3,4. Sea n un número cuyo representación en la base 10 es 122. ¿Cual es su representación en la base 5? Respuesta: 442, porque $122 = 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2$.

2. (a) Convertir las siguientes representaciones en la base 10 a las bases 2 y 3: 2, 10, 11, 100, 1000.
   (b) Convertir las siguientes representaciones en la base 3 a las bases 2 y 10: 2, 10, 11, 100, 1000.
   (c) Para escribir la representación de un número en la base 10 se necesita 100 dígitos (i.e. $k = 99$ en ejercicio 1). Sea k el número de dígitos necesarios para escribirlo en la base 2. Encuentra el mínimo y máximo posible valor de k.
   (d) ¿Cuantas veces aparece el dígito 6 al escribir la lista de todos los números de 1 hasta 1999 en la base 10? y en la base 9?

3. * (Opcional.) Sea b un entero mayor que 1 y r un número real en $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

   (a) Demuestra que existe una sucesión infinita $y_1, y_2, y_3, \ldots$ tal que $y_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, $\forall i \geq 1$, y

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{b^i} = \frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2} + \frac{y_3}{b^3} + \ldots.$$

   (Sugerencia: demuetsra, por inducción, la existencia de una sucesión infinita $I_1, I_2, \ldots$ de intervalos, tal que para todo $i \geq 1$: (1) $r \in I_i$, (2) $I_{i+1} \subset I_i$, (3) I_i es de la forma $[N_i/b^i, (N_i+1)/b^i)$, $N_i \in \mathbb{N}$. Luego, $y_1 = N_1$, $N_2 = bN_1 + y_2, \ldots$ etc. Otra suegrencia: considera las represenataciones en base b de la parte entera de los números rb^i, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

   Terminología: a $0.\, y_1\, y_2\, y_3\, \ldots$ se llama una representación de r en la base b.

   (b) Demuestra que cada número real en $[0, 1)$ tiene a lo mas dos representaciones en una base b y que los números $r \in [0, 1)$ que tienen dos representaciones en una base b son exactamente los números racionales de la forma $r = N/b^k < 1$, donde N, k son números naturales ≥ 1 y $N < b^k$.

4. (a) Convertir las siguientes representaciones en la base 10 a las bases 2 y 3: 0.1, 0.01, 0.01333....
   (b) Encontrar los primeros 5 dígitos en la representación de $\sqrt{2}$ en la base 2.