Algebra Superior, 30.9.99.

Tarea No. 8 (Para entregar el 7 de Oct. 99)

En los primeros 3 problemas n es un entero mayor que 1.

1. (a) Demuestra que la relación "congruentes modulo n" es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

   (b) Sea $\mathbb{Z}_n$ el conjunto de las clases de equivalencia de la relación "congruentes modulo n." Demuestra que $\#\mathbb{Z}_n = n$. (Sugerencia: considera la función $\{0, 1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_n$, $k \mapsto [k]$.)

2. (a) Sea a un entero. Demuestra que existe un único $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que a es de la forma $nk + r$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Llamemos a este r "el resíduo de a (mod n)."

   (b) Demuestra que el resíduo de a (mod n) es el único $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $a \equiv r \pmod{n}$.

   (c) Demuestra que dos enteros son congruentes $\pmod{n}$ si y solo si tienen el mismo resíduo $\pmod{n}$.

   (d) Encuentra los resíduos de 1999, modulo 10, 1000, 3, 9 y 11.

3. (a) Sean $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv a' \pmod{n}$ y $b \equiv b' \pmod{n}$. Demuestra que $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$, $ab \equiv a'b' \pmod{n}$ y $a^k \equiv (a')^k \pmod{n}$, para todo entero $k \geq 0$.

   (b) Encontrar los últimos 3 dígitos de 1999^{1999}. (Sugerencia: Demuestra que los últimos 3 dígitos de un número, escrito en la base 10, se obtiene por su resíduo mod 1000. Luego usa el hecho $999 \equiv -1 \pmod{1000}$ en el inciso anterior.)

4. (a) Sea n un entero positivo cuyo desarrollo decimal es $a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$; i.e., $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, con $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Demuestra que $n \equiv a_0 + a_2 + \ldots + a_k \pmod{3}$.

   (b) Decide si 24681097531 es divisible por 3, 9 o 11. (Sugerencia para 11: demuestra que $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^k a_k \pmod{11}$.)

5. Resolver (i.e. encontrar todos los x que satisfacen las congruencias en cada caso, o demostrar que no hay solución):

   (a) $x + 3 \equiv 2 \pmod{5}$.

   (b) $3x \equiv 2 \pmod{5}$.

   (c) $3^x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \geq 0$.

   (d) $x^3 \equiv 2 \pmod{5}$.

   (e) $2x \equiv 3 \pmod{5}$ y $3x \equiv 5 \pmod{7}$.

   (f) $3x \equiv -1 \pmod{1000}$.