Algebra Superior, 7.10.99.

Tarea No. 9 (Para entregar el 21 de Oct. 99)

1. Hacer tablas de multiplicación $\pmod n$ para $2 \le n \le 9$.

2. Se dice que un entero a es invertible $\pmod n$ si existe un entero b tal que $ab \equiv 1 \pmod n$. Se dice que b (en caso que existe) es una inversa (o reciproco) de $a \pmod n$. Notacion: $b \equiv \frac{1}{a} \pmod n$.

   (a) Usando las tablas que construiste en el problemas anterior, encuentra para cada n en el rango $2 \le n \le 9$, cuales son los números invertibles en el rango $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

   (b) Sean a, a' dos enteros congruentes $\pmod n$. Demuestra que a es invertible $\pmod n$ si y solo si a' es invertible $\pmod n$. Concluye que el adjetivo "invertible $\pmod n$" se puede aplicar, sin ambiguedad, a una clase de congruencia $\pmod n$.

   (c) Sean a, a' dos enteros congruentes $\pmod n$. Demuestra que $(a, n) = (a', n)$. Concluye que el adjetivo "prima relativa $\pmod n$" se puede aplicar, sin ambiguedad, a una clase de congruencia $\pmod n$.

   (d) Demuestra que una clase de congruencia $\pmod n$ es invertible $\pmod n$ si y solo si es prima relativa a n.

3. Sea n un entero ≥ 2. Definimos a $\phi(n)$ como el número de clases de congruencia invertibles $\pmod n$. (Se conoce a ϕ como "la función de Euler.")

   (a) Calcula $\phi(n)$ para $2 \le n \le 9$.

   (b) Demuestra que $\phi(p) = p - 1$ para p primo.

   (c) Calcula el $\phi(p^k)$ para p primo, $k \ge 1$.

   (d) Demuestra que $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ para todo $n, m \ge 2$ que son primos relativos.

   (e) Calcular $\phi(1000000)$.