Introducción a la Mecánica Clásica
FAMAT, agst-dic 2000

Tarea no. 5

(para entregar el martes, 26 de sept.)

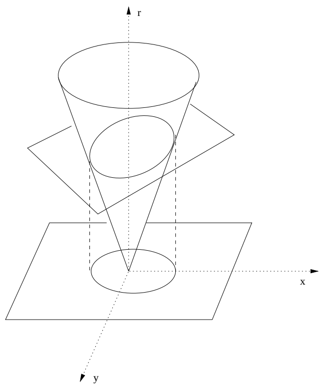
1. Considera el sistema de Kepler $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}/r^3$, donde $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $r = \|\mathbf{r}\|$. Demuestra que cada solución del sistema consiste en un movimiento a lo largo de una sección cónica en $\mathbb{R}^2$ con un foco en el orígen, de la manera siguiente:

   (a) considera la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $(x(t), y(t), r(t))$. Demuestra que esta curva se encuentra sobre la intersección del cono $r^2 = x^2 + y^2$ con un plano $r = A + Bx + Cy$.

   (b) Demuestra que la proyección al plano de (x, y) de cualquier sección del cono del inciso anterior es una sección cónica con foco en el orígen.

   (c) Demuestra que todas las órbitas de Kepler con un valor fijo del momento angular corresponden a secciones del cono del inciso (a) por planos que pasan por un punto fijo del eje vertical.

   (d) Demuestra que todas las órbitas de Kepler con un valor fijo de la energía corresponden a secciones del cono del inciso (a) por planos que son *tangentes* a un paraboloide de revolución fijo $r = (x^2 + y^2)/4\alpha + \alpha$, inscrito dentro del cono.



2. Demuestra que todos las órbitas elípticas del sistema de Kepler con el mismo valor de energía tienen el mismo semi-eje mayor.

3. Demuestra la tercera ley de Kepler: toda solución periódica (elíptica) del sistema de Kepler satisface $T^2/a^3 = constante$, donde T es el periodo, a es el semi-eje mayor y la constante no depende de las condiciones iniciales. Encuentra el valor de la constante.

4. Considera un sistema mecánico de N partículas con masas $m_1, \ldots, m_N$ y posiciones $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ que satisface el sistema de ecuaciones $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = F_i$, $i = 1, \ldots, N$. El sistema se llama un *sistema cerrado* si cada $F_i = \sum_{i \neq j} F_{ij}$, con $F_{ij} = -F_{ji}$, y donde cada F_{ij} es proporcional a $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Demuestra que en un sistema cerrado se conservan el momento (lineal) total $\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ y el momento angular total $\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$.