CIMAT, VIII Escuela de verano, 30 de julio - 12 de agosto 2001
Introducción a la Geometría de la Mecánica Clásica

Problemas 1 - 4

1. Una partícula se mueve en el plano según la fórmula $(x, y) = (\cos 2t, \text{sen } 2t)$.

   (a) Encuenra su posición cuando $t = \pi/4$.

   (b) Encuentra los tiempos t cuando se encuentra en $(0, 1)$.

   (c) Encuentra los vectores de velocidad y aceleración al pasar en $(0, 1)$. Dibujar.

2. Una partícula con masa $m = 1$ se mueve a lo largo del eje de x según la ecuación de Newton $m\ddot{x} = F(x)$, con fuerza $F = -x$.

   (a) Dibuja a lo largo del eje de x el "campo de Fuerza F"; i.e., pon arriba de cada punto del eje de x una flecha que representa a $F(x)$.

   (b) Dadas las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, dibuja la gráfica de x como función del tiempo t.

   (c) ¿Es periódico el movimiento del inciso anterior? En caso que sí, encuentra el *periodo* del movimiento (i.e. el tiempo que le toma volver a su posición y velocidad inicial).

   (d) Dibujar en el *plano de fase de la ecuación* (el plano con coordenadas cartesianas $(x, \dot{x})$) la curva parametrizada por $(x(t), \dot{x}(t))$.

   (e) Repetir el incisos anterior con $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$.

   (f) Dibuja el *retrato de fase* de la ecuación; es decir, hay que dibujar curvas de fase como en los dos incisos anteriores, para todas las condiciones iniciales posibles, o un número suficiente de ellas para tener idea clara de cómo se ve el retrato.

3. Para una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje de x bajo la influencia de una fuerza $F(x)$ se define su *energía* (como función de su posición y velocidad) por $E = T + V$ donde la energía cinética $T = m(\dot{x})^2/2$ y la energía potencial $V(x)$ es una función que satisface $F = -\frac{d}{dx}V$. Demuestra que si la partícula se mueve según la ecuación de Newton $m\ddot{x} = F(x)$ entonces su energía E se mantiene constante en el tiempo (la Ley de Conservación de Energía).

   Sugerencia: calcula $\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t))$ usando la regla de la cadena.

4. Dibujar el retrato de fase de las siguientes ecuaciones:

   (a) $\ddot{x} = -2x$ (oscilador armónico).

   (b) $\ddot{x} = x$ (equilibrio inestable).

   (c) $\ddot{x} = -\text{sen } x$ (péndulo).

   (d) $\ddot{x} = -1$ (piedra que se cae).

   (e) $\ddot{x} = -1/x^2$ (aterrizaje duro).