Problemas 13 - 19

13. Demuestra que un *campo central*, i.e. un campo vectorial de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r)\mathbf{x}$, donde $r = \|\mathbf{x}\|$ y $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ es una función suave, es un campo conservativo en $\mathbf{R}^n$ menos el origen y encuentra un potencial para $\mathbf{F}$.

14. Escribir la ecuación de Newton $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathrm{grad}(V)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, en coordenadas polares (r, θ) en el plano, donde $V = V(r)$ es un potencial de fuerza central, usando el formalismo Lagrangiano.

    Es decir, hay que escribir el Lagrangiano $L = T - V$ del sistema en coordenadas polares, y luego escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2,$$

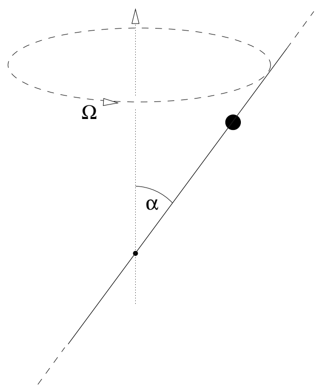
    donde $q_1 = r$, $q_2 = \theta$.

15. Analisar el movimiento de los siguientes ejemplos de sistemas mecánicos:

    (a) Un palo ligero (=sin masa) de longitud fija l y dos masas m_1 y m_2 en sus extremos, moviéndose en un plano vertical, bajo la influencia de la fuerza de gravedad $\mathbf{F}(x, y) = (0, -g)$.

    Sugerencia: es un sistema con *tres* grados de libertad, así que tienes que definir tres coordenadas (q_1, q_2, q_3) que describen la posición del palo, luego escribir el Lagrangiano del sistema $L = T - V$ en términos de $(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, luego escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange y resolverlas....

    (b) Una masa resbalando sobre una línea que pasa por el origen en $\mathbf{R}^3$, forma un ángulo α con el eje de z (el eje vertical) y gira alrededor de este eje con velocidad angular ω. Tambien se supone que la masa está bajo la influencia de la gravedad.



    (c) Un palo (delgado) de longitud l con distribución de masa uniforme moviendose en un plano vertical fijo bajo la influencia de gravedad.

    NOTA: En los siguientes dos ejemplos, despues de escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange uno se da cuenta que son complicadas... entonces sugiero linearizar *el sistema alrededor de los puntos de equilibrio (¿cuantos hay en cada caso?), i.e. tomar la parte lineal en la expansión en la serie de Taylor de las ecuaciones de Euler-Lagrange alrededor de cada uno de los puntos de equilibrio. Una manera agradable de hacer esto es escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange de la parte* cuadrática *de la serie de Taylor del Lagrangiano alrededor del punto de equilibrio en cuestión.*

    (d) Un "doble pendulo", i.e. dos masas, m_1 y m_2, la primera en el extremo de un péndulo de longitud l_1, la segunda en el extremo de un pendulo de longitud l_2, amarado a la primera masa.

(e) Pendulo esférico, i.e. un péndulo, en donde la masa se puede mover en cualquer dirección en $\mathbf{R}^3$, sujeta a la restricción que su distancia al origen es fija. Tambien se supone que la masa está baja la influencia de la gravedad.

16. Sea $E_0 := \{g : [0,1] \to \mathbf{R} \mid g$ es diferenciable y $g(0) = g(1) = 0\}$.

    (a) Demuestra que E_0 es un espacio vectorial de dimensión infinita.

    (b) Sea $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una función continua tal que $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ para toda $g \in E_0$. Demuestra que $f = 0$.

Los siguientes 3 problemas son del libro de Arnold, capítulo 2.

17. Decide si el campo de fuerza $\mathbf{F}$ en $\mathbf{R}^2$ menos el origen, dado por $\mathbf{F} = (x_2, -x_1)/(x_1^2 + x_2^2)$, es conservativo.

18. Sea $A(E)$ el área dentro de una curva de fase cerrada que corresponde a nivel de energía E de la ecuación de Newton $\ddot{x} = -dV/dx$. Demuestra que el periodo de movimiento a lo largo de esta trayectoria es igual a dA/dE.

19. Sea $V(x)$ la función de potencial para la ecuación de Newton $\ddot{x} = -dV/dx$ y $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto mínimo no degenerado de V, i.e. $V'(x_0) = 0$ y $V''(x_0) > 0$. Sea $E_0 = V(x_0)$. Demuestra que el periodo de "oscilaciones pequeñas en vecindad de x_0" $T_0 = \lim_{E \to E_0} T(E)$ está dado por $2\pi/\sqrt{V''(x_0)}$.