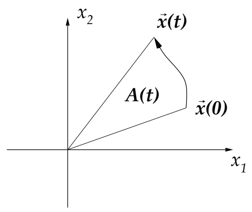
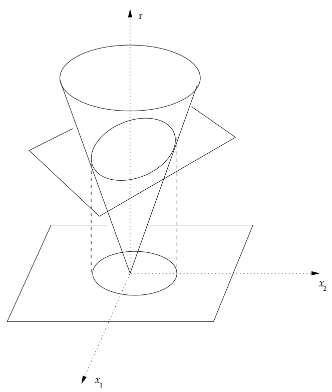
Problemas 7 - 12

7. Demuestra que $\mathrm{grad}(1/r) = -\mathbf{x}/r^3$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ y $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. En otras palabras, $-1/r$ es un potencial para el sistema de Kepler $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$.

8. Demuestra, en el problema de Kepler $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}/r^3$, donde $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, que $l = r^2\dot{\theta}$ es el *momento angular* $x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1$. Interpreta l tambien en términos del área $A(t)$ cubierto por el radio vector de la partícula (ver dibujo).



9. Demuestra que cada solución del problema de Kepler consiste en un movimiento a lo largo de una sección cónica en $\mathbf{R}^2$ con un foco en el orígen, de la manera siguiente:
   (a) Considera la curva en $\mathbf{R}^3$ parametrizada por $(x_1(t), x_2(t), r(t))$. Demuestra que esta curva se encuentra sobre la intersección del cono $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ con un plano $r = A + Bx_1 + Cx_2$.
   (b) Demuestra que la proyección al plano de (x_1, x_2) de cualquier sección del cono del inciso anterior es una sección cónica con foco en el orígen.
   (c) Demuestra que todas las órbitas de Kepler con un valor fijo del momento angular corresponden a secciones del cono del inciso (a) por planos que pasan por un punto fijo del eje vertical.
   (d) Demuestra que todas las órbitas de Kepler con un valor fijo de la energía corresponden a secciones del cono del inciso (a) por planos que son *tangentes* a un paraboloide de revolución fijo $r = (x_1^2 + x_2^2)/4\alpha + \alpha$, inscrito dentro del cono.



10. Demuestra que todas las órbitas elípticas de Kepler con el mismo valor de energía tienen el mismo semi-eje mayor.

11. Demuestra la tercera ley de Kepler: toda solución periódica (elíptica) del problema de Kepler satisface $T^2/a^3 = \textit{constante}$, donde T es el periodo, a es el semi-eje mayor y la constante no depende de las condiciones iniciales. Encuentra el valor de la constante.

12. Considera el "sistema de N cuerpos": son N puntos en $\mathbf{R}^3$ con masas $m_1, \ldots, m_N$ y posiciones $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbf{R}^3$, $i = 1, \ldots, N$, sujetos al siguiente sistema de N ecuaciones diferenciales:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j m_i (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

(a) Demuestra la conservación del *momento lineal total* $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$, donde $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$.

(b) Define el *centro de masa del sistema* como $\mathbf{x}_{CM} = (\sum_i m_i \mathbf{x}_i)/M$, donde $M = \sum_i m_i$ es la *masa total*. Concluye del inciso anterior que $\mathbf{x}_{CM}$ se mueve en $\mathbf{R}^3$ con velocidad uniforme.

(c) Define *las coordenadas de los cuerpos con respecto al centro de masa* por $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{CM}$, $i = 1, \ldots, N$. Demuestra que las N funciones vectoriales $\mathbf{x}'_i$ satifacen el mismo sistema de ecuaciones diferenciales que las $\mathbf{x}_i$.

Al pasar a las coordenadas $\mathbf{x}'_i$, podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que el centro de masa queda fijo en el origen.

(d) Bajo la última suposición ($\mathbf{x}_{CM} = 0$), demuestra la conservación del *momento angular total* $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$, donde $\mathbf{l}_i = \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$ (producto vectorial).

(e) Para el caso de dos cuerpos ($N = 2$), usando coordenadas con respecto al centro de masa, demuestra que el problema se reduce al problema de Kepler.