Teoría de Conjuntos – Tarea num. 5

(Por entregar el 12 de sept 2002)

Definiciones: una <u>relación</u> sobre un conjunto A es un subconjunto $R \subset A \times A$. Para $a, b \in A$, si $(a,b) \in R$, se denota esto también por aRb ("a está relacionado con b, según R"). La relación es <u>simétrica</u> si aRb implica bRa, <u>antisimétrica</u> si aRb, bRa implica $a = b$, <u>reflexiva</u> si aRa para todo $a \in A$ y <u>transitiva</u> si aRb, bRc implica aRc. Una relación simétrica, reflexiva y transitiva se llama una <u>relación de equivalencia</u>. En este caso, dado un $a \in A$, el conjunto $[a] := \{b \in A \mid aRb\}$ se llama <u>la clase de equivalencia de a</u> (según R). Una relación antisimétrica, reflexiva y transitiva se llama un <u>orden parcial</u> (en A). En este caso, si para todo $a, b \in A$, aRb ó bRa, se dice que R es un orden <u>total</u> (o lineal), y que A está totalmente (o linealmente) ordenado.

1. Para cada una de las siguientes relaciones determine si es simétrica, antisimétrica, reflexiva o transitiva. En caso que la relación es de equivalencia hay que estudiar las clases de equivalencia (descripción de las varias clases, la cardinalidad del conjunto de las clases). En caso que la relación es un orden parcial, hay que decidir si es un orden total.
   (a) $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(a,b) \mid a - b \text{ es un múltiplo de } 3\}$.
   (b) $A = \mathbb{N}$, $R = \{(a,b) \mid a - b \text{ es un múltiplo de } 3\}$.
   (c) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \mid a \geq b\}$.
   (d) $A = P(X)$, donde X es un conjunto, $R_1 = \{(a,b) \mid a \subset b\}$, $R_2 = \{(a,b) \mid |a| \leq |b|\}$, $R_3 = \{(a,b) \mid a \sim b\}$.
   (e) $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $R = \{(f,g) \mid f \text{ y } g \text{ coinciden fuera de un subconnjunto finito de } \mathbb{R}\}$.

   (Nota: más formalmente, fRg ssi existe un subconjunto finito $F \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus F$.)
   (f) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \mid a - b \in \mathbb{Z}\}$.
   (g) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \mid a - b \in \mathbb{Q}\}$.
   (h) $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $R = \{(f,g) \mid \text{ existe un } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(n) = g(n) \text{ para todo } n \geq n_0\}$.
   (i) $A = P(\mathbb{N})$, $R = \{(x,y) \mid (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \text{ es finito}\}$.
   (j) $A =$ el conjunto de todas las lineas en el plano, $R = \{(l_1, l_2) \mid l_1 \text{ y } l_2 \text{ son paralelas }\}$.
   (k) Dada una función $f : A \to B$, $R = \{(x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$.
2. (a) Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ la familia de las clases de equivalencia de R. Demuestra que $\{C_i\}_{i \in I}$ es una partición de A; o sea, $A = \bigcup_{i \in I} C_i$, y $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
   (b) Demuestra el converso: dada una partición de un conjunto A, existe una única relación de equivalencia en A, tal que la familia de sus clases de equivalecia coincide con los miembros de la partición.

   (Sugerencia: si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una partición de A, demuestra que para cada $a \in A$ existe un único i_a tal que $a \in C_{i_a}$. Luego define aRb ssi $i_a = i_b$. Compara también con el inciso (k) del problema anterior. No se te olvide demostrar la unicidad de R).