Teoría de Conjuntos – Tarea num. 7

(Por entregar el 26 de sept 2002)

Definiciones. Un *conjunto parcialmente ordenado* (CPO) es un conjunto A junto con una relación de orden parcial R en A (o sea R es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva; ver tarea núm. 5). Denotamos un CPO también por el par ordenado (A, R). Un CPO (A, R) induce también orden parcial R' en cualquier subconjunto $A' \subset A$: para todo $a', b' \in A'$, $a'R'b'$ ssi $a'Rb'$. Ejemplos de CPO son $(\mathbb{R}, \leq)$, $(P(X), \subseteq)$ y sus subconjuntos con el orden inducido (ver tarea num. 5, incisos (c) y (d) del problema 1). Un *isomorfismo* de dos CPO (A, R) y (A', R') es una biyección $f : A \to A'$ tal que aRb ssi $f(a)R'f(b)$. Dos CPO son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos. Un *automorfismo* de un CPO es un isomorfismo del CPO con su mismo. Por ejemplo, $f(x) = x+1$ define un automorfismo de $(\mathbb{R}, \leq)$, y $f(n) = 2n$ define un isomorfismo de los números naturales con los números pares (con sus ordenes usuales). Si (A, R) es un CPO, un $a \in A$ se llama *primero* si aRb para todo $b \in A$ (y se llama *último* si bRa para todo $b \in A$). Una *cadena* en un CPO es un subconjunto totalmente ordenado (o sea, para cualquer dos elementos a, b del subonjunto aRb ó bRa).

1. Decide si los siguientes son isomorfos CPO:
   (a) $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{Z}, \leq)$.
   (b) $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$.
   (c) $(P(X), \subseteq)$ y $(P(Y), \subseteq)$, donde $X \sim Y$.
   (d) $(\mathbb{R}, \leq)$ y $(\mathbb{R}^+, \leq)$, donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$.
   (e) $(\mathbb{R}, \leq)$ y $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \leq)$.
   (f) $(\mathbb{R}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \geq)$.
   (g) (Opcional) $([0, 1], \leq)$ y $([0, 1) \cup (2, 3], \leq)$.

   Sugerencias: para (a), nota que $\mathbb{N}$ tiene primer elemento y que $\mathbb{Z}$ no. Para (b) nota que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, si $x < y$ entonces existe un tercer $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$, y que $\mathbb{Z}$ no tiene esta propiedad. Para (d), puedes considerar por ejemplo la función $f(x) = 7^x$. Para (e), nota que $(\mathbb{R}, \leq)$ no tiene un primer elemento. Para (f), puedes considerar a $f(x) = -x$. Para (g), nota que $([0, 1], \leq)$ tiene la propiedad que todo subconjunto no vacio tiene un infimo (cota inferior maximal); o sea, para todo $A \subset [0, 1]$ existe un $c \in [0, 1]$, tal que $c \leq a$ para todo $a \in A$ (esto quiere decir que c es una cota inferior de A), y tal que $c \geq c'$ para cualquier otro $c' \in [0, 1]$ que sea cota inferior de A.
2. Encuentra todos los automorfismos de los siguientes CPO:
   (a) $(\mathbb{N}, \leq)$
   (b) $(\mathbb{Z}, \leq)$.
   (c) $(P(X), \subseteq)$, donde X es un conjunto con 2 elementos.
   (d) (Opcional) $(P(X), \subseteq)$, donde X es un conjunto (1) finito, (2) denumerable, (3) cualquiera.
3. Demuestra que si dos CPO son isomorfos, entonces sus conjuntos de cadenas, ordenados por inclusión, también son isomorfos.

   Con mas detalle: sean (A_1, R_1) y (A_2, R_2) dos CPO. Sean $Cad(A_i)$, $i = 1, 2$, sus correspondientes conjuntos de cadenas. Nota que cada $Cad(A_i)$ es un subconjunto de $P(A_i)$ (el conjunto de todos los subconjuntos de A_i), así que el orden en $P(A_i)$ dado por inclusion de conjuntos (como la relación R_1 en el problema 1d de la tarea núm. 5) induce un orden parcial en cada uno de los $Cad(A_i)$. Demuestra que si existe un ismorfismo entre (A_1, R_1) y (A_2, R_2) entonces existe tambien un isomorfismo entre $(Cad(A_1), \subseteq)$ y $(Cad(A_2), \subseteq)$.