Teoría de Conjuntos – Tarea num. 9

(Por entregar el jueves 31 de oct 2002)

Nota: en la página del curso se encuentran referencias útiles para esta tarea y para el tema del paradója de Banch-Tarski en general.

Definiciones. Sea X un conjunto. Un conjunto G de biyecciones se X de llama un *grupo* si (1) $id_X \in G$, (2) $g_1, g_2 \in G \Longrightarrow g_1 \circ g_2 \in G$, (3) $g \in G \Longrightarrow g^{-1} \in G$. Dos conjuntos $A, B \subset X$ son *G-congruentes* si existe un $g \in G$ tal que $g(A) = B$. Dos conjuntos $A, B \subset X$ son *G-equi-descomponibles* si existen particiones $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, $A_i \bigcap A_j = B_i \bigcap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, tal que A_i y B_i son G-congruentes, $i = 1, \ldots, n$.

Problema 1. Demuestra que "G-congruentes" y "G-equi-descomponibles" son relaciónes de equivalencia en $P(X)$.

Definición. Un subconjunto $A \subset X$ es *G-paradójico* si existe una partición $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, tal que A_i y A son G-equi-descomponibles, $i = 1, 2$.

Problema 2. Sean $A, B \subset X$ dos subconjuntos G-equi-descomponibles. Demuestra que si A es G-paradógico entonces B es también G-paradógico.

Definición. La *G-órbita* de un $x \in X$ es el conjunto $\{g(x) \mid g \in G\}$.

Problema 3. Demuestra que el conjunto de las G-órbitas forma una partición de X.

Definición. Para cada $g \in G$ se define $\tilde{g} : G \to G$ por $\tilde{g}(h) = g \circ h$. Sea $\tilde{G} := \{\tilde{g} \mid g \in G\}$.

Problema 4. Demuestra que $\tilde{G}$ es un grupo de biyecciones de G.

Definiciónes. Se dice que un grupo G es *paradójico* si es $\tilde{G}$-paradójico. Un $x \in X$ es un *punto fijo* de un $g \in G$ si $g(x) = x$. Se dice que X no tiene puntos fijos el único $g \in G$ con puntos fijos es $g = id$.

Problema 5. Demuestra que si G es un grupo paragójico de biyecciones de un conjunto X sin puntos fijos entonces X es G-paradójico.

Sugerencia: Sea $S \subset X$ un conjunto que contiene un elemento de cada G-órbita y sea $\phi : G \times S \to X$ la función dada por $\phi(g, s) = g(s)$. Demuestra que ϕ es una biyección. Demeuestra que si $G = G_1 \cup G_2$ es una "partición paradójica" de G entonces $X = \phi(G_1 \times S) \cup \phi(G_2 \times S)$ es una partición G-paradójica de X.

Problema 6. Sea D un subconjunto denumerable de vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$; o sea, $D \subset S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Demuestra que existe una rotación ρ en $\mathbb{R}^3$ tal que los conjuntos D, $\rho(D)$, $\rho(\rho(D))$, $\ldots$ son disjuntos ($\rho^i(D) \cap \rho^j(D) = \emptyset$, $i \neq j$).

Sugerencia: demuestra que existe una linea $l \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y que no intersecta a D. Luego considera el conjunto de las rotaciones ρ_θ por ángulo θ alrededor de l. Demuestra que para cada $x \in D$ y $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_{n,x} = \{\theta \mid \rho_{n\theta}(x) \in D\}$ es denumerable (o finito) y concluyes que $A = \bigcup_{n,x} A_{n,x}$ es denumerable (o finito). Demuestra que puedes tomar $\rho = \rho_\theta$, con un θ en el complemento de A en $[0, 2\pi)$.