Exámen parcial núm. 1

23 sept, 2005

1. *a*) Define: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua.
   b) Define: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable.
   c) Demuestra: si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces es continua.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función dada por
$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$
   y sean $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$. Calcula
   a) las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en $\mathbf{x}$;
   b) la derivada de f en $\mathbf{x}$;
   c) el gradiente de f en $\mathbf{x}$;
   d) la derivada direccional de f en $\mathbf{x}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

3. La superficie de un terreno está dada por la gráfica de la función
$$f(x, y) = 3 - (x - 1)^2 - \frac{(y + 2)^2}{4}.$$
   a) Dibuja en el plano x, y la curva de nivel de f que pasa por el punto $(0, 0)$.
   b) Encuentra las coordenadas (x, y, z) del punto más alto del terreno.
   c) Estás en la superficie del terreno en el punto $(0, 0, 1)$ y caminas hacia el este (en la dirección del eje de x positivo). Encuentra la pendiente de tu camino.

   Nota: verifique primero que el punto $(0, 0, 1)$ está en la superficie del terreno.

   d) Estás en el punto $(0, 0, 1)$ y decides caminar en la dirección de bajada mas empinada posible. Encuentra esta dirección.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas de segundo orden y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x, y) = f(u, v)$, donde $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. Determina el laplaciano de F en $(x, y) = (0, 1)$ en términos del laplaciano de f en $(u, v) = (-1, 0)$.

   Nota: el laplaciano de una función $g(s, t)$ es la función $\Delta g = g_{ss} + g_{tt}$.

   Sugerencia: demuestra que $u_x = v_y, u_y = -v_x$ y usa estas relaciones para simplificar la expresión del laplaciano de F en términos del laplaciano de f.