MATERIAL PARA EL EXAMEN FINAL DEL CURSO DE CALCULO 4

MAYO 2006

Definiciones .

Punto crítico de una función, mínimo/máximo local, el hessiano en un punto crítico, forma cuadrática positiva/negativa definida.

La medida exterior/interior de un conjunto en en $\mathbb{R}^n$, conjunto medible según Jordan y su medida, conjunto compacto, función uniformamente contínua, cubierta abierta de un conjunto, subcubierta finita. Una función integrable (según Jordan). La Jacobiana de un cambio de variables (o de una función diferenciable entre dos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, esféricas y cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

Secciones cónicas (elipse, hipérbola, parábola). Focos y vértices. Líneas asíntotas de una hipérbola, directrix de una parábola.

El área de la gráfica de una función de dos variables. El centro de gravedad (o masa) de un conjunto en $\mathbb{R}^n$, su momento de inercia relativo a un eje (=línea). Una forma diferencial lineal, su integral a lo largo de una curva parametrizada, la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva parametrizada. Forma cerrada/exacta. Curva cerrada. Curvas cerradas homotópicas. La divergencia de un campo vectorial en un abierto en $\mathbb{R}^n$. Una superficie regular en $\mathbb{R}^n$, una parametrización (local/global) de tal superficie, el plano tangente a tal superficie en uno de sus puntos. Una orientación en un espacio vectorial real de dimensión finita. Una orientación en una superficie regular. Superficie orientable. Superficie orientada. Una forma diferencial cuadrática, la intgegral de tal forma en una superficie orientada. El área de una superficie regular. La diferencial de una función, de una forma diferencial linea, y de una forma diferencial cuadrática. Una superficie regular con frontera, la orientación inducida en la frontera de una superficie regular orientada con frontera. El rotacional de un campo vectorial en un abierto en $\mathbb{R}^3$. El flujo de un campo a travez de una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Teoremas .

Nota: todas las funciones en los teoremas y problemas abajo son diferenciables tantas veces que sea necesario (tres veces es típicamente más que suficiente).

1. Un punto crítico de una función real en un abierto en $\mathbb{R}^n$, en donde el hessiano es positivo (resp. negativo) definido es un mínimo (resp. máximo) local.
2. Un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ es medible según Jordan ssi su frontera tiene medida nula (para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta finita de la frontera por cubos cerrados con suma total de medidas menor que $\epsilon > 0$).
3. Toda función contínua en un compacto es uniformamente contínua.

4. Teorema de Fubini (acerca de integrales múltiples de funciones de varios variables).
5. Teorema de cambio de variable (para integrdales múltiples).
6. Teorema de la divergencia para formas diferenciales y campos vectoriales en el plano.

Problemas .

1. Calcular las siguientes integrales:
   a) Prob. 9-14 pág. 462.
   b) La integral de la función $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}$ sobre todo $\mathbb{R}^2$. (ver prob. 10, pág. 687 para la interpretación geométrica de este integral.)
   c) La integral de la forma lineal $L = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ sobre la elipse $(x - a)^2 + 7y^2 = 4$ orientada en la dirección de las manecillas del reloj $(a \neq 2)$. Hay que dar la respuesta en términos de a.
   d) La integral de la forma cuadrática $\alpha = dxdy + dydz + dzdx$ sobre el hemisferio norte de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen (el conjunto de puntos (x, y, z) que satifacen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$), con su orietación estandar. (Sugerencia: α es una forma cerrada.)
   e) La integral de la forma cuadrática $\alpha = (xdydz + ydzdx + zdxdy)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ sobre el elipsoide $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 5$ con su orientación estandar. (Sugerencia: la forma está definida en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Es útil saber si es cerrada o exacta. Para la interpretación geométrica de esta forma ver el problema 9 de la pág. 686).
2. **Definición.** Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$, $A, B \in U$, $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ dos curvas en U que conectan a A con B (i.e. $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = A$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = B$). Decimos que "se puede deformar γ_0 a γ_1 con extremos fijos" (o que son "homotópicas") si existe una función diferenciable $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$ que satisface

   - $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [a, b]$,
   - $\Gamma(a, s) = A$ y $\Gamma(b, s) = B$ para todo $s \in [0, 1]$.

   a) Demuestra que si L es una forma cerrada y γ_0, γ_1 son dos curvas homotópicas con extremos fijos, entonces $\int_{\gamma_0} L = \int_{\gamma_1} L$.
   b) Demuestra que las curvas $\gamma_0, \gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dadas por $\gamma_0(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\gamma_1(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$, no son homotópicas con extremos fijos.

   Sugerencia: considerar la forma $L = xdy - ydx/(x^2 + y^2)$.
3. Demostrar que una forma lineal cerrada en $\mathbb{R}^2$ es exacta.
4. Dar un ejemplo de una forma lineal cerrada en un abierto en $\mathbb{R}^2$ que no es exacta. Mismo para $\mathbb{R}^n$.
5. Dar un ejemplo de una forma cuadrática cerrada en un abierto en $\mathbb{R}^3$ que no es exacta.
6. Encontrar el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^4$.
7. En una bola solida se perfora un agujero cilíndrico de longitud l cuyo eje pasa por el centro de la bola. Encuentra el volumen lo que queda de la bola.

   Nota: los diámetros del agujero y de la bola no estan dados, solo la l.

8. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible y $v \in \mathbb{R}^3$. El *cono sobre B con vertice v* es la union de todos los segmentos de la forma $[u, v] \subset \mathbb{R}^3$, donde $u = (x, y, 0)$ y $(x, y) \in B$. Demuestra que el cono sobre B tiene volumen $b \cdot h/3$, donde b es el área de B ("base") y h es el valor absoluto de la coordenada z de v ("altura").
9. Dar un ejemplo de una función contínua $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible pero que f no es integrable.
10. Dar un ejemplo de una función contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que no es uniformamente contínua.
11. Cierto o falso: la suma de dos funciones uniformamente contínuas es uniformamente contínua. Mismo para el producto y cociente (cuando el deniminador no se anula).
12. Dado un subconjunto medible compacto $A \subset \mathbb{R}^3$ y una línea l en $\mathbb{R}^3$ se denota por $I_l(A)$ el momento de inercia de A alrededor de l (la integral sobre A del cuadrado de la distancia a l; ver pág. 491 del libro de Courant-John). Demuestra que si uno fija la A y varía la l entre todas las líneas paralelas a una línea fija entonces el momento de inercia se minimiza para la línea que pasa por el centro de masa de A.
13. Encuentra el momento de inercia de un cubo de lado a con respecto a un eje de rotación que pasa por dos vértices opuestos del cubo (dos vértices que no se encuentran sobre la misma cara).

    Sugerencia: se puede calcular directamente de la definición, pero puede ser más facil usar algo de teoría. Primero demuestra que en general, para calcular $I_l(A)$, se puede tomar un punto arbitrario P en l y $\mathbf{e}$ un vector unitario paralelo a l, y luego

    $$I_l(A) = \int_A \|\mathrm{r} \times \mathbf{e}\|^2 dxdydz,$$

    donde $\mathrm{r} = (x, y, z) - P$. Esto demuestra que para P fijo y $\mathbf{e}$ variable $I_l(A)$ es una forma cuadrática en $\mathbf{e}$. Así que posee tres ejes principales y eigen valores. Luego, cualquer simétria (=isometría) de A que fija P es una simetría de la forma cuadrática (manda ejes principales a ejes principales con el mismo eigen valor. Esto es suficiente para determinar los ejes de inercia principales del cubo con respecto a su centro de masa y sus eigen valores.
14. Sea v un campo vectorial en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dado por $v(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}$, donde $f(r)$ es una función diferenciable definida para $r > 0$. Demuestra que la integral de línea de v a largo de cualquer curva cerrada que no pasa por el origen se anula.