Cálculo 4, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2006.

Tarea num. 4

(Por entregar el lunes, 27 feb, 2006.)

Definicion. Sean P_1, P_2 dos puntos distintos en $\mathbb{R}^2$. Una *hipérbola* con *focos* en P_1, P_2 es el conjunto de puntos $P \in \mathbb{R}^2$ cuya diferencia de distancias a P_1, P_2 es una constante; es decir $|d_1 - d_2| = 2a$, donde $d_i = \|P_i - P\|$, $i = 1, 2$, y $0 < 2a < \|P_1 - P_2\|$. El punto $(P_1 + P_2)/2$ se llama el *centro* de la hipérbola. La línea que pasa por P_1, P_2 y la línea ortogonal a esta línea que pasa por el centro son los ejes principales de la hipérbola. Los puntos más cercanos al centro son los *vértices* de la hipérbola.

1. Demuestra que se puede escribir la ecuación de una hipérbola con focos en $\pm(c, 0)$ en la forma $Q(P) = 1$, donde Q es una forma cuadrática no degenerada indefinida (una forma cuadrática asociada a una matriz simétrica invertible, que no es positiva ni negativa definida). Encuentra los vértices de esta hipérbola. Hacer un dibujo.

   Sugerencia: jugar con la ecuación $\|P - P_1\| - \|P - P_2\| = \pm 2a$.
2. Demuestra que una forma cuadrática $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es no degenerada indefinida ssi $ac - b^2 < 0$.

   Sugerencia: la determinante de una matriz simétrica 2×2 es negativa ssi sus valores propios tienen signos opuestos.
3. Demuestra que si Q es una forma cuadrática no degenerada indefinida, entonces $Q(P) = 1$ es la ecuación de una hipérbola cuyos focos estan simétricamente situados con respecto al origen ($P_2 = -P_1$). Encuentra la relación entre Q y los ejes de la hipérbola.

   Sugerencia: al diagonalizar Q, la ecuación se reduce al caso del primer inciso.
4. Demuestra que la ecuación de una hipérbola en general se puede escribir de la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde la parte cuadrática $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es una forma cuadrática no degenerada indefinida.

   Sugerencia: sea $P_0 = (P_1 + P_2)/2$ el centro de la hipérbola. Demuestra que la ecuación de la hipérbola se puede escribir de la forma $Q(P - P_0) = \text{constante}$.
5. Definición: una línea $l \subset \mathbb{R}^2$ es una línea asíntota a un conjunto cerrado no acotado $C \subset \mathbb{R}^2$ si (1) $l \cap C = \emptyset$, (2) $\inf\{\|P - Q\| \,|P \in l,\, Q \in C\} = 0$.
   a) Demuestra que una hipérbola es un subconjunto cerrado no acotado de $\mathbb{R}^2$ con dos líneas asíntotas, pasando por su centro.
   b) Encuentra las ecuaciones de las líneas asíntotas de la hipérbola $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$. Hacer un dibujo.
6. Demuestra que $4xy - 3y^2 + 2x = 8$ es la ecuación de una hipérbola. Encuentra su centro, focos, ejes, vértices y líneas asíntotas. Hacer un dibujo.

   Sugerencia: define un cambio de variables ortogonal $(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ que diagonaliza la parte cuadrática $4xy - 3y^2$. Luego, define una traslación $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$ que absorbe la parte lineal en la parte cuadrática ("completar los cuadrados"). La ecuación, en términos de (x_2, y_2), se reduce al caso del primer inciso.
7. (Opcional) Demuestra que la intersección de un plano en $\mathbb{R}^3$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$ es una hipérbola ssi el plano no pasa por el origen y el ángulo que forma con el eje de z es $< 45^0$. Demuestra que los focos de la hipérbola se encuentran mediante la siguiente construcción: se considera esferas inscritas dentro del cono y tangentes al plano. Hay dos tales esferas: una (pequeña) "atrapada" entre el cono y el plano y otra, más grande, al otro lado del plano, en la otra componente del cono. Los puntos de contacto de estas esferas con el plano son los focos de la hipérbola. Encuentra una construcción geométrica para las líneas asíntotas de la hipérbola.