Notas núm. 3

Estas notas cubren las clases del curso desde 5 de sept 2007. Los ejercicios están marcados con →.

Definición. Una **acción suave** de un grupo de Lie G en una variedad M es una función suave $\rho : G \times M \to M$ tal que

- $\rho(g) := \rho(g, \cdot)$ es un difeomorfismo de M para todo $g \in G$,
- $g \mapsto \rho(g)$ es un homomorfismo entre G al grupo de difeomorfismos de M.

Otra manera de decirlo: si definimos $gx := \rho(g, x)$, entonces tenemos la "ley de asociatividad" $(gh)x = g(hx)$.

Más definiciones.

• La **órbita** de un $x \in M$ es el subconjunto $G(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset M$.

→**3.1.** Distintas órbitas no se intersectan.

• El **estabilizador** de x es el conjunto $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subset G$. Un $x \in M$ es un **punto fijo** si $G_x = G$. La acción es **trivial** si todo $x \in M$ es un punto fijo.

→**3.2.** $G_x \subset G$ es un subgrupo cerrado y $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ (los estabilzadres de dos puntos en la misma orbita son subgrupos conjugados).

• Un subconjunto $M_1 \subset M$ es un subconjunto **invariante** si $gx \in M_1$ para todo $(g, x) \in G \times M_1$. Así que se define una acción de G en M_1.

→**3.3.** Cada órbita es un subconjunto invariante **minimal** (no contiene subconjunto invariante más que ella misma). Un subconjunto es invariante ssi es una unión de órbitas.

→**3.4.** Para todo $x \in M$ la función $G/G_x \to G(x)$, $gG_x \mapsto gx$ es una biyección.

• La acción es **transitiva** si para todo $x, y \in M$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$. También se dice en este caso que M es una variedad G-**homogenea**.

• Si $H \subset G$ es un subgrupo se define (de manera obvia) la **restricción** de la acción de G en M a H.

• Si V es un espacio vectorial y G actua en V por isomorphismos lineales, o sea $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$ para cada $g \in G$, se dice que G actua linealmente en V, o que V es una **representación** (lineal) de G. En este caso tenemos entonces un homomorfismo $G \to \mathrm{GL}(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$. De la misma manera se define una representación ortogonal ($\rho(g) \in O_n$), compleja ($\rho(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), unitaria ($\rho(g) \in \mathrm{U}_n$), cuaterniona ($\rho(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$) etc. etc.

• Una representación lineal de G en V es **irreducible** si no tiene subespacios lineales G-invariantes, más que V mismo y el subespacio nulo.

• Una función $f : M \to \widetilde{M}$ entre dos espacios M y $\widetilde{M}$ con acciones ρ y $\widetilde{\rho}$ (resp.) es G-**equivariante** si $f \circ \rho(g) = \widetilde{\rho}(g) \circ f$ para todo $g \in G$. Las acciones $\rho, \widetilde{\rho}$ son **equivalentes** si existe un difeomorfismo G-equivariante entre M y $\widetilde{M}$. Dos representaciones lineales $V, \widetilde{V}$ son **representaciones equivalentes** (o G-isomorfas) si existe un isomorfismo lineal G-equivariante entre V y $\widetilde{V}$.

$\to$**3.5.** Una función G-equivariante manda órbitas a órbitas, subconjuntos invariantes a subconjuntos invariantes, puntos fijos a puntos fijos,

• Todas las construcciones de álgebra lineal se puede hacer facilmente con representaciones: la **suma directa** de dos representaciones lineales V_1 y V_2 es la representación en $V_1 \oplus V_2$ dada por $g(v_1, v_2) = (gv_1, gv_2)$; el **producto tensorial** de las dos representaciones $V_1 \otimes V_2$ está dado por $g(v_1 \otimes v_2) = (gv_1) \otimes (gv_2)$; la representación dual es la representación en V^* dada por $g\alpha = \alpha \circ \rho(g)^{-1}$; si $W \subset V$ es un subespacio invariante se define una representación en V/W. etc etc.

$\to$**3.6.** Toda respresentación de un grupo finito en un espacio vectorial V de dimensión finita es isomorfa a la suma directa de respresentaciones irreducibles.

Sugerencia: escoges en V *cualquer* producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ y demuestras que

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \langle gv, gw \rangle_0$$

es un producto escalar G-invariante. Si V es irreducible terminamos; si no, hay un subespacio G-invariante $W \subset V$, con $0 < \dim W < \dim V$. Demuestras que $W^\perp$ (el complemento ortogonal de W) es G-invariante y que V es G-isomorfo a $W \oplus W^\perp$.

Ejemplos de acciones y representaciones.

• Todo grupo actua en su mismo por translaciones por la izquierda, $x \mapsto gx$, por la derecha, $x \mapsto xg^{-1}$ y por conjugación $x \mapsto gxg^{-1}$.

• $G = \mathrm{GL}_n$ viene equipado con una representación en $\mathbb{R}^n$. Mismo para cualquer subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}^n)$.

• $G = S_n$, el grupo de permutaciones de n objetos, viene equipado con una acción en el conjunto de los primeros n números $\{1, \ldots, n\}$.

• Si G actua en M, se puede definir una representación lineal en el espacio vectorial V de todos las funciones en M por $[\rho(g)f](x) = f(g^{-1}x)$.

$\to$**3.7.** La dimensión de V es la cardinalidad de M.

• Pensando en un vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como en una función $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, obtenemos una representación lineal en $\mathbb{R}^n$ del grupo de permutaciones de n objetos en $\mathbb{R}^n$.

• El grupo de isometrias de un cubo tiene una representación de dimensión 8 que viene de la acción en el conjunto de los vértices, otra de dimensión 12 que viene de la acción en el conjunto de aristas, otra de dimensión 6 que viene de la acción en el conjunto de las caras, otra de dimensión 3 que viene en la acción en el conjunto de los pares de caras opuestas, otra de dimensión 4 que viene de la acción en el conjunto de los diagonales...

$\to$**3.8.** El grupo de isometrias de un cubo es isomorfo a S_4.

• La acción de un grupo G en su mismo por translaciones por la izquierda y la derecha induce una representación lineal de $G \times G$ en el espacio de las funciones en G. Se llama la **representación regular**.

→**3.9.** Determina los subconjuntos invariantes de la repersentación usual de $G = \mathrm{SO}_n$ en $V = \mathbb{R}^n$. Demustra que esta repersentación es irreducible. Mismo para la representación de U_n en $\mathbb{C}^n$.

→**3.10.** La representación lineal de SO_n en $\mathbb{R}^n$ es isomorfa a su dual. El mismo inciso para la acción de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ es falso. (Sugerencia: considera el determinante de esta representación).

→**3.11.** (Opcional) La representación regular de un grupo finito de orden n tiene dimensión n. Es ismorfa a la suma directa de $\hat{n}$ representaciones irredicubles, donde $\hat{n}$ es el número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de G, que es lo mismo que el número de clases de conjugación de G. Para cada (clase de equivalencia de) representación irreducible U de G de dimensión d corresponde en la representación regular de $G \times G$ la representación irreducible $U \otimes U^*$ de dimensión d^2. La acción de $G \times G$ en $U \otimes U^*$ está dada por $(g, g')(v \otimes v^*) = (gv) \otimes (g'v^*)$. Una base para el espacio $U \otimes U^*$ está dada por las d^2 entradas de $G \to GL(U)$. Esta es una base ortonormal, y la representación regular es una representación ortogonal, con respecto al producto escalar $\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_g f_1(g) f_2(g)/n$. Ejemplos: $G = \mathbb{Z}_n$, $\hat{n} = n$; $G = S_3$, $n = 6$, $\hat{n} = 3$, $d = 1, 1, 2$; $G = S_4$, $n = 24$, $\hat{n} = 5$, $d = 1, 1, 2, 3, 3$; $G = S_5$, $n = 120$, $\hat{n} = 7$, $d =?$

Referencia: el libro de J.P. Serre sobre representaciones de grupos finitos.