Notas núm. 4

Estas notas cubren las clases del curso desde 17 de sept 2007. Los ejercicios están marcados con →.

Meta de esta parte del curso.

Consideramos la representación lineal usual de $G = \mathrm{SO}_3$ en $\mathbb{R}^3$. La esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es un subconjunto invariante, así que se define una acción de SO_3 en el espacio de las funciones en S^2 y el subespacio V de las funciones suaves es un subespacio invariante. Queremos demostrar:

• V se descompone bajo la acción de SO_3 como una suma directa (infinita) $V = \oplus V_d$, donde V_d es una representación irreducible de SO_3 de dimensión $d = 1, 3, 5, \ldots$.

• Las representaciones V_d forman una lista completa de representantes, sin repeticiones, de todas las clases de isomorfismos de representaciones irreducibles de SO_3.

• La descomposición $V = \oplus V_d$ es a la vez la descomposición en eigen espacios del operador de Laplaciano Δ de S^2; o sea, cada $V_d \subset V$ es el espacio de funciones $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta f = \lambda f$, para un $\lambda \in \mathbb{R}$ que depende solamente de d (lo determinaremos). Los elementos de V_d se llaman "armónicos eféricos de grado d en S^2".

• Las funciones de V_d son la restricción a S^2 de los polinomios homogeneos armónicos en $\mathbb{R}^3$ de grado d.

Resumen de la demostración.

• Se define $A := \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ (polinomiales complejos en 3 variables). Se define en A un producto escalar SO_3-invariante al declarar el conjunto de los monomios como base ortogonal, con

$$\|x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}\|^2 = k_1! k_2! k_3!.$$

• Se define $A_m \subset A$ como los polinomios homogeneos de grado $m = 0, 1, 2, \ldots$. Es SO_3-invariante y se tiene una descomposición ortogonal $A = \oplus A_m$.

• Los operadores $\partial/\partial x_i$ y multiplicación por x_i son operadores adjuntos en A.

• Se define en A los operadores $\Delta = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ y multiplicación por $r^2 = \sum_i x_i^2$. Son operadores adjuntos, SO_3-equivariantes, tal que

$$\Delta(A_m) \subset A_{m-2}, \quad r^2(A_m) \subset A_{m+2}.$$

• Se define $H_m \subset A_m$ como el kernel de Δ (polinimios armónicos de grado m). Es un subespacio irreducible de dimensión $d = 2m + 1$ y se tiene una descomposición ortogonal en $[m/2] + 1$ subespacios irreducibles

$$A_m = H_m \oplus r^2 H_{m-2} \oplus r^4 H_{m-4} \oplus \ldots.$$

• Ahora se define $\rho : A \to V$ como la restricción de funciones de $\mathbb{R}^3$ a S^2. Es inyectivo, SO_3-equivariante, y su imagen es densa en V (usando el teorema de Weirstrass).

• Se obtiene una descomposición en irreducibles $\rho(A) = \oplus \rho(H_m)$, donde $\rho(H_m)$ es el espacio de las eigenfunciones del Laplaciano en S^2 con el eigen valor $\lambda = \ldots$.

• Toda representación irreducible de SO_3 es isomorfa a una de las H_m.

• Sea $\mathrm{SO}_2 \subset \mathrm{SO}_3$ el estabilizador de $(0,0,1)$. Al restringir la acción de SO_3 en H_m a SO_2 se descompone $H_m = L^m \oplus L^{m-1} \oplus L^{m-2} \oplus \ldots \oplus L^{-m}$, donde L^m es la representación de SO_2 en $\mathbb{C}$, $h(z) \mapsto z^m$, donde $z = e^{i\theta}$ y $h(z) \in \mathrm{SO}_2$ es una rotación por ángulo θ.

Los grupos de Lie SO_3 y SU_2.

• SO_3 es el grupo de matrices reales ortogonales 3×3 con det=1. Hemos demostrado en clase, mediante el teorema de función implicita, que es un grupo de Lie compacto, de dimension 3.

• Denotamos a la álgebra de Lie de SO_3 (el espacio tangente en la identidad) por $\mathfrak{so}_3$. Consiste en las matrices 3×3 antisimétricas.

Dem: si $g(s)$ es una curva en SO_3 tal que $g(0) = I$, entonces derivando $g(s)g(s)^t = I$ con respecto a s en $s = 0$ se obtiene $\dot{g}(0) + \dot{g}(0)^t = 0$.

• Definimos un isomorfismo $(\mathbb{R}^3, \times) \to \mathfrak{so}_3$, $v \mapsto A_v$, donde $A_v w = v \times w$.

→**4.1.** Verificar que es un isomorfismo de álgebras de Lie.

→**4.2.** Encontrar todas las sublagebras de $\mathfrak{so}_3$ y demostrar que $\mathfrak{so}_3$ es una álgebra simple (no tiene ideales no triviales).

→**4.3.** Encontrar una álgebra de Lie no conmutativa de dimensión 2.

Sugerencia: Considerar las transformaciones afines de $\mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$. Otro: automorfismos lineales de $\mathbb{R}^2$ que dejan fijo un vector no nulo.

→**4.4.** Encontrar una álgebra de Lie no conmutativa de dimensión 3, que no sea isomorfa a $\mathfrak{so}_3$.

Sugerencia: considera el grupo de automorfismos lineales de $\mathbb{R}^2$ que preservan área. Otro: automorfismos lineales de $\mathbb{R}^2$ que fijan una línea. Otro: automorfismos lineales de $\mathbb{R}^3$ que preservan volumen, que dejan invariante un plano, que preservan el área en este plano y que dejan fijo un vector no-nulo en este plano.

→**4.5.** Demostrar que SO_3 es un grupo simple (no tiene subgrupos normales no triviales).

• SU_2 es el grupo de matrices complejas 2×2 que son unitarias y con det=1.

→**4.6.** Demostrar $A \in \mathrm{SU}_2$ ssi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

→**4.7.** Demotsrar que SU_2 es un grupo de Lie.

• Se define los cuaterniones $\mathbb{H}$ como el conjunto de los elemntos de la forma $h = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, donde $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, con estructura de espacio vectorial como en $\mathbb{R}^4$, y producto bilineal definido por las reglas $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, \ldots$ (dos permutaciones cíclicas adicionales). Se define la conjugación por $\bar{h} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ y la norma por $\|h\|^2 = h\bar{h}$.

→**4.8.** (a) $\overline{h_1 h_2} = \bar{h}_2 \bar{h}_1$. (b) $\|h_1 h_2\| = \|h_1\| \, \|h_2\|$. (c) todo $h \neq 0$ es invertible. (d) $\|h\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. (e) Expresar el producto de dos cuaterniones imaginarios ($\bar{h} = -h$) en términos del producto vectorial y escalar en $\mathbb{R}^3$.

• Se define $\mathrm{Sp}_1 \subset \mathbb{H}$ como el conjunto de cuateriones de norma 1.

→**4.9.** Demostrar que Sp_1 es un grupo de Lie, difeomorfo a S^3 e isomorfo a SU_2.

Sugerencia: se define en $\mathbb{H}$ una estructura de espacio vectorial complejo, $\lambda \cdot h = h\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego escojes una base, digamos $\{1, j\}$, y defines un isomofismo lineal complejo $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H}$, $(a, b) \mapsto a + jb$. Luego, la acción de Sp_1 en $\mathbb{H}$ por multiplicación por la izquierda define un isomorfismo $\mathrm{Sp}_1 \to \mathrm{SU}_2$.

- Ahora se define un homomorfismo $\mathrm{Sp}_1 \to \mathrm{SO}_3$ mediante la siguiente definicón: se identifica a $\mathbb{R}^3$ con el espacio de cuaterniones imaginarios $Im(\mathbb{H})$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Luego se define una acción de Sp_1 en $Im(\mathbb{H})$ por conjugación, $q \cdot v = qv\bar{q}$.

→**4.10.** Demuestra que esta acción es una acción ortogonal, con det=1, que el kernel de la accion es $\{1, -1\} \subset \mathrm{Sp}_1$ y que la imagen es todo SO_3.

→**4.11.** Sea G un grupo de Lie compacto actuando trasitivamente en una variedad M. Sea V el espacio de funciones continuas en M con la acción usual de G y sea $V_1 \subset V$ un subespacio invariante de dimensión finita > 0. Sea $x \in M$ y sea $G_x \subset G$ su estabilizador. Demuestra: (a) existe en V_1 un elemento no-nulo G_x-invariante. (b) Toda representación irreducible de G que contiene un vector no-nulo G_x-invariante es ismorfa a una subrepresentación de V.

Sugerencia: sea $V_2 \subset V_1$ el subespacio de funciones que se anulan en x. Demuestra que V_2 es G_x invariante y tiene codimensión 1. Ahora considera un elemento no nulo del complemento ortogonal de V_2, con respecto a un producto escalar G_x-invariante.