Examen parcial núm. 1 – soluciones

(18 mar 2011)

Cierto o Falso.

1. Toda matriz cuadrada simétrica con coeficientes reales es congruente a una matriz diagonal.
   $\triangleright$ Cierto. El algoritmo de diagonalización de matrices simétricas que hemos visto en el curso produce justo esto. $\square$
2. Toda matriz cuadrada simétrica con coeficientes reales es congruente a un múltiplo por escalar de la matriz identidad.
   $\triangleright$ Falso. Por ejemplo, para $n = 2$, la matriz diagonal 2×2 cuyas entradas en el diagonal son $1, -1$. $\square$
3. Cualquer dos matrices cuadradas simétricas $n \times n$ con coeficientes reales que son negativas definidas son congruentes.
   $\triangleright$ Cierto. El algoritmo de diagonalización visto en el curso muestra que ambas matrices son congruentes a la matriz $-I$. $\square$
4. Cualquer dos matrices cuadradas simétricas $n \times n$ con coeficientes reales que son invertibles son congruentes.
   $\triangleright$ Falso. Por ejemplo, para $n = 2$, la matriz identidad y la matriz del inciso 2. $\square$
5. Dada una forma cuadrática con coeficientes reales f en 6 variables $x_1, \ldots, x_6$, de rango 6 y signatura 0, existe una matriz invertible P, 6×6 con entradas p_{ij}, tal que el cambio de variables $x_i = \sum_{j=1}^{6} p_{ij} y_j$ convierte la f a la forma cuadrática $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2 - 4y_4^2 + 5y_5^2 - 6y_6^2$.
   $\triangleright$ Cierto. Todas las formas cuadráticas con el mismo número de variables, rango y signatura son equivalentes por cambio de variable (la ley de inercia de Sylvester). $\square$
6. Todo sistema de ecuaciones lineales sobre un campo K con más incognitas que ecuaciones tiene por lo menos una solución.
   $\triangleright$ Falso. Por ejemplo $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$ (una ecuación con dos incognitas). $\square$
7. Si un sistema de ecuaciones lineales sobre un campo K con más incognitas que ecuaciones tiene una solución entonces esta solución no es única.
   $\triangleright$ Cierto. Primero, un sistema homogeneo con más incognitas que ecuaciones tiene una solución no trivial. Esto es porque al llevar la matriz de coeficientes a forma ecalonada reducida, necesariamente nos quedamos con variables libres. Luego, si sumas una solución no-trivial del sistema homegeneo a la solución del sistema original obtenemos una solución distinta. $\square$
8. Sea A una matriz $m \times n$ con coeficientes en un campo K. El conjunto de los vectores $w \in K^m$ para los cuales el sistema $Av = w$ tiene una solución es un subespacio vectorial de K^m.
   $\triangleright$ Cierto. Es el conjunto $W = \{Av | v \in K^n\}$. Así que $0 = A \cdot 0 \in W$ por lo que W no es vacio. Luego si $Av_1, Av_2 \in W \implies Av_1 + Av_2 = A(v_1 + v_2) \in W$, y si $c \in K \implies c(Av_1) = A(cv_1) \in W$). $\square$

9. Sea A una matriz $m \times n$ con coeficientes en un campo K. Entonces para todo $w \in K^m$, el cojunto de soluciones $v \in K^n$ al sistema $Av = w$ es un subespacio vectorial de K^n.
   ▷ Falso. Para $w \neq 0$ el vector $v = 0$ no es una solución de $Av = w$, por lo que el conjunto de soluciones al sistema no es un subespacio vectorial de K^n. □
10. Sean $A, B \in Mat_n(K)$ (matrices $n \times n$ con coeficientes en un campo K) tal que existe una serie de operaciones elementales de columna que convierte la A a la B. Si A es invertible entonces B tambien.
    ▷ Cierto. Cada operación elemental se representa por multiplicación a la derecha por una matriz elemental, digamos E_i. Así que $B = AE$, donde $E = E_1 E_2 E_3 \ldots E_k$. Como las E_i son invertibles, E es invertible también, por lo que AE también. □
11. Si A es una matriz simétrica 3×3 positiva definida entonces todas sus entradas son distintas de 0.
    ▷ Falso. Por ejemplo I (la matriz identidad). □
12. Si A es una matriz simétrica 3×3 positiva definida entonces todas las entradas sobre su diagonal son positivas.
    ▷ Cierto. $a_{ii} = e_i^t A e_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, donde e_i es el vector que tiene todas las enrtadas 0, excpeto un 1 en el lugar i. □
13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la función dada por $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x - y)$ y sea $W = \{f(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Entonces existe un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incognitas con coeficientes reales tal que W es el conjunto de soluciones de este sistema.
    ▷ Cierto. De hecho, W está dado por una ecuación de la forma $aX + bY + cZ = 0$ (la otra ecuación puede ser $0 = 0$). Para determinar a, b, c basta tomar dos generadores de W: $f(1, 0) = (1, 1, 2)$ y $f(0, 1) = (1, -1, -1)$, así que $a + b + 2c = a - b - c = 0$. Una solución no trivial a este sistema (dos ecuaciones con 3 incognitas) es $(a, b, c) = (1, 6, -2)$, por lo que $W = \{(X, Y, Z) | X + 6Y - 2Z = 0\}$. □
14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la función dada por $f(x, y) = (x + y, x - y, 2xy)$ y sea $W = \{f(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Entonces existe un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incognitas con coeficientes reales tal que W es el conjunto de soluciones de este sistema.
    ▷ Falso. El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se obtiene al sumarle a una solución particular todas las soluciones del sistema homogeneo asociado. Esto implica que si w_1, w_2 son 2 soluciones, $(w_1 + w_2)/2$ tambien lo es (demostración: $w_2 = w_1 + v$, con v solución al sistema homogeneo asociado $\implies$ $(w_1 + w_2)/2 = (2w_1 + v)/2 = w_1 + v/2$ es una solución tambien, porque las soluciones al sistema homegeneo es un subespacio vectorial). Sean ahora $w_1 = f(1, 0) = (1, 1, 2)$, $w_2 = f(1, -1, -2)$. Entonces $w := (w_1 + w_2)/2 = (1, 0, 0)$. Veremos que $w \notin W$: $(1, 0, 0) = f(x, y) = (x + y, x - y, 2xy) \implies x + y = 1, x - y = 0, 2xy = 0$. Luego es facil ver que este sistema no tiene solución, así que $w \notin W$. □