Calculo III, DEMAT-CIMAT, aug-dic 2011.

Examen parcial 1

8 sep 2011

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(t) = (t^2, t^3)$.
   a) Dibuja la imagen de f en $\mathbb{R}^2$.
   b) Dibuja $f'(t)$ sobre la imagen de f.
      Nota: "dibujar $f'(t)$"significa dibujar una flecha basada en $f(t)$ para varios valores de t (suficiente valores para tener idea de lo que sucede).
   c) Repetir el inciso anterior para $f''(t)$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $Df(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestra que f es constante.
3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Demuestra que
   a) f es diferenciable para todo $\mathbf{x} \neq 0$ y calcula la derivada de f para tal $\mathbf{x}$.
   b) f no es diferenciable en $\mathbf{x} = 0$.
4. Cierto o Falso:
   a) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es contínua y $F \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado entonces $f(F)$ es cerrado.
   b) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})]/\|\mathbf{v}\|$ existe.
   c) Existe una función lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(x + h)(y + k) - L(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$