Calculo III, aug-dic 2011.

Guía para examen parcial 1

(fecha del examen: 8 sept)

Para preparar al examen recomendo primero aprender con precisión todas las definiciones, los teoremas y sus demostraciones, y conocer ejemplos y contra-ejemplos. Todo el material se encuentra en el libro de texto de Courant y John. Para quitar dudas (y quejas que el libro no es muy claro), doy abajo un listado de las definiciones y teoremas, seguido por una descripción del material visto en clase y tarea. En la segunda y tercera parte de la guía vienen problemas para ayudar a digerir el material.

1. Definiciones y resultados vistos en el curso

1.1. Definiciones:

La norma (estándar) de un vector en $\mathbb{R}^n$, subconjuntos abiertos/cerrados de $\mathbb{R}^n$, cerradura/interior/frontera, sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$, función contínua entre dos subconjuntos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, un conjunto de nivel de tal función, función difrenciable entre abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, su derivada (o diferencial), derivada direccional, derivadas parciales y matriz Jacobiana, gradiente de una función real, vector de velocidad de una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$.

1.2. Teoremas:

- Una función diferenciable es continua.
- Una función con derivadas parciales continuas es diferenciable.

1.3. Descripción del material visto en clase.

Definición 1. *La norma (estándar) de un vector* $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define como* $\|\mathbf{v}\| = \sum_i |v_i|^2$. *La distancia entre dos puntos* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *se define como* $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. *La bola abierta con centro en* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *y radio* $r > 0$ *es el conjunto* $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} | \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$.

Proposición 1. *1.* $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ *y* $\|\mathbf{v}\| = 0$ *ssi* $\mathbf{v} = 0$. *2. Para todo* $c \in \mathbb{R}$, $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|v\|$. *3.* $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$.

Definición 2. *Un subconjunto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto si para todo* $\mathbf{x} \in U$ *existe un* $\epsilon > 0$ *tal que* $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset U$. *Un cerrado es el complemento de un abierto.*

Nota: el conjunto vacío también se considera abierto.

Proposición 2. *La unión (cualquiera) de abiertos es un abierto, la intersección finita de abiertos es abierto. La interescción (cualquera) de cerrados es un cerrado, la unión finita de cerrados es cerrado.*

Definición 3. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$. *El interior de* A, $intA$, *es la unión de los abiertos contenidos en* A. *El exterior de* A *es* $extA = intA^c$ *(el interior del complemento de* A*), la cerradura de* A *es* $\bar{A} = (extA)^c$, *y la frontera de* A *es* $\partial A = \bar{A} \setminus A$.

Proposición 3. *Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$: la cerradura de A es un cerrado, y es la interesección de todos los cerrados que contienen a A; $intA \subset A \subset \bar{A}$ y $\mathbb{R}^n = intA \cup \partial A \cup extA$ es una partición (unión de conjuntos disjuntos). $\mathbf{x} \in \bar{A}$ ssi todo abierto que contiene a $\mathbf{x}$ intersecta a A. $\mathbf{x} \in \partial A$ ssi todo abierto que contiene a A intersecta a A y A^c (el complemento de A en $\mathbb{R}^n$).*

Definición 4. *Sea $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}$, ó $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$, si $\lim_{i\to\infty} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| = 0$.*

Proposición 4. *$\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$ ssi $\alpha_j(\mathbf{x}_i) \to \alpha_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, n$, donde $\alpha_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la coordenada j ($\alpha_j : \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_j$). Si $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_i \to \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Si además $c_i \to c$ (convergencia de sucesión de reales), entonces $c_i\mathbf{x}_i \to c\mathbf{x}$. Si $\{c_i\}$ es una sucesión acotada de reales y $\mathbf{x}_i \to 0$ entonces $c_i\mathbf{x}_i \to 0$.*

Proposición 5. *Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \bar{A}$ ssi existe una sucesión $\{\mathbf{x}_i\}$ en A que converge a $\mathbf{x}$. $\mathbf{x} \in \partial A$ ssi exsiten sucesiones $\{\mathbf{x}_i\} \subset A$, $\{\mathbf{y}_i\} \subset A^c$ que convergen a $\mathbf{x}$.*

Definición 5. *Sea $f : A \to B$ una función entre conjuntos en espacios euclideanos, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. Sean $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$, $\mathbf{y}_0 \in \bar{B}$. Se dice que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A) \subset B_\epsilon(\mathbf{y}_0)$ (para todo $\mathbf{x} \in A$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon$). Se dice que f es contínua en $\mathbf{x}_0 \in A$ si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. Se dice que f es contínua si es contínua en todos los puntos de su dominio.*

Proposición 6. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ *ssi para toda sucesión $\{\mathbf{x}_i\} \subset A$, $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_0 \Longrightarrow f(\mathbf{x}_i) \to \mathbf{y}$. f es contínua en $\mathbf{x}_0$ si $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_0 \Longrightarrow f(\mathbf{x}_i) \to f(\mathbf{x}_0)$.*

Proposición 7. *Sean $y_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones de coordenadas y $f_i = y_i \circ f$ las componentes de f. Entonces f es contínua en $\mathbf{x}_0$ ssi $f_1, \ldots, f_n$ son contínuas en $\mathbf{x}_0$.*

Proposición 8. *Sea $f : A \to B$ una función contínua entre conjuntos en espacios euclideanos, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. Sea A_0 el conjunto de los puntos $\mathbf{x}_0 \in \partial A$ tal que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existe y sea $B_0 \subset \bar{B}$ el conjunto de estos límites. Entonces f se extiende (de manera única) a una función contínua $A \cup A_0 \to B \cup B_0$.*

Definición 6. *Los conjunto de nivel de una función $f : A \to B$ son los preimagenes de puntos de B; o sea, los conjuntos de la forma $f^{-1}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in A | f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$, donde $\mathbf{y} \in B$. (Si $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, los conjuntos de nivel de f se llaman a veces* curvas de nivel*, aunque no son siempre curvas).*

Definición 7 (Derivada direccional)**.** *Sea $f : U \to V$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $V \subset \mathbb{R}^m$. Sean $\mathbf{x} \in U$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. La derivada*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t},$$

si existe, se llama la derivada direccional de f en $\mathbf{x}$ en la direccion de $\mathbf{v}$ y se denota por $D_\mathbf{v} f(\mathbf{x}_0)$.

Si $f = (f_1, \ldots, f_m)$, la derivada parcial de f_i con respecto a x_j es la derivada direccional de f_i en la dirección del vector $\mathbf{e}_i$ (el i-esimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$), y se denota por $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. La matrix Jacobiana de f en $\mathbf{x}$ es la matriz de derivadas parciales $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ (si estas derivadas parciales existen).

Definición 8 (función diferenciable)**.** *Sea $f : U \to V$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $V \subset \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en un punto $\mathbf{x} \in U$ si existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que*

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

f es diferenciable en U si es diferenciable en todos sus puntos.

Proposición 9. *La transformación lineal A de la definición de función diferenciable, en caso que existe, es única.*

Definición 9. *La transformación lineal A de la definición de función diferenciable, si existe, se llama la derivada de f en $\mathbf{x}_0$ y se denota por $Df(\mathbf{x}_0)$.*

Nota: si f es una función escalar, i.e. $f : U \to \mathbb{R}$, y es diferenciable, entonces se denota a la derivada de f por df, la *diferencial* de f.

Proposición 10. *Si f es diferenciable en $\mathbf{x}$ entonces la derivada direccional en este punto existe en todas las direcciones y se tiene que $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{v}$. En particular, existen tambien todas las derivadas parciales y la matriz jacobiana en $\mathbf{x}$ es la matriz que representa a $Df(\mathbf{x})$ con respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.*

Nota: el ejemplo $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ muestra que la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ puede existir para todo $\mathbf{v}$ aun si $Df(\mathbf{x}_0)$ no existe, y en particular, el mapa $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$, aun si está bien definido, no tiene que ser lineal cuando f no es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Teorema 1 (Diferenciabilidad implica continuidad)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en un $\mathbf{x} \in U$, entonces f es continua en $\mathbf{x}$.*

Teorema 2. *Si $f : U \to V$ tiene derivadas parciales contínuas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable.*

Proposición 11. *f es diferenciable en $\mathbf{x}$ ssi todas sus componenets $f_i : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $\mathbf{x}$. Una transformacíon lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $DT(\mathbf{x}) = T$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. El producto de funciones diferenciables $f, g : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$.*

2. Problemas

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Demuestra que $D_a f(t) = af'(t)$. En particular, $f'(t) = D_1 f(t)$.
2. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto. Demuestra que $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. (Esto es, $Df(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) dx_i(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) x_i$ para todo $\mathbf{x} \in U$.)
3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ (o, usando números complejos, $f(t) = e^{it}$).
   a) Dibuja la imagen de f en $\mathbb{R}^2$.
   b) Calcula f' y dibuja $f'(t)$ sobre la imagen de f para varios valores de t (suficiente valores para tener idea de lo que sucede).

   Nota: "dibujar" $f'(t)$ significa dibujar una flecha basada en $f(t)$.

c) Repetir el inciso anterior para f''.

d) Repetir los incisos anteriores para
- $f(t) = (t, -t^2)$ ("tiro parabólico")
- $f(t) = (t + \cos t, \sin t)$ ("traza de un punto en la circunferencia de una rueda"),
- $f(t) = (t^2, t^3)$ ("un pico infinitamente filoso").

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $Df = 0$ (o sea, $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$). Demestra que f es constante.

   Sugerencia: dado un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f(t\mathbf{x})$. Demuestra que $g' = 0$ así que g es constante y en particular $g(0) = g(1)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Demuestra que f no es diferenciable en $\mathbf{x} = 0$ y calcula la derivada para $\mathbf{x} \neq 0$.

6. (Opcional) Definición: una función $f : U \to \mathbb{C}$, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto, es holomorfa si es diferenciable y sus componentes u, v satifacen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Para tal función, se define $f'(z) = f_x(z) = u_x + iv_x$.

   a) Demuestra: $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa ssi para todo $z \in U$ la derivada $Df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal.

   Sugerencia: recuerda (del curso de álgebra lineal I) que una función $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$-lineal si $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2$ y $T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y es $\mathbb{C}$-lineal (o lineal compleja) si además $T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Demuestra que las transformación $\mathbb{C}$-lineales son aquellas transformaiones $\mathbb{R}$-lineales cuya matriz (respecto a la base canónica $\{1, i\}$) es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Esto es, las transformaciones de la forma $T(z) = cz$, donde $c = a + ib$.

   b) Demuestra: si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces $Df(z)v = f'(z)v$ (producto de números complejos).

   c) Demuestra: si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son holomorfas entonces su producto es tambien holomorfo y $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

   d) Usando el último inciso, calcula $Df(z)$ para $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   e) Calcula $Df(z)$ para $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^n$, $n = -1, -2, -3, \ldots$ (demuestra que estas funciones son holomorfas).

   f) Demuestra que las componentes u, v de una función holomorfa son funciones armónicas.

   Nota: una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica si $g_{xx} + g_{yy} = 0$.

   g) Demuestra que $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es holomorfa y calcula su derivada.

h) Demuestra que $\log : U \to \mathbb{C}$ definida por $f(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, donde r, θ son las coordenadas polares de z y U son los puntos que satisfacen $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, es holomorfa y calcula su derivada.

Respuesta: $f'(z) = 1/z$.

i) Demuestra que $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfo si y solo si para todo $z \in U$ el limite $\text{lím}_{h\to 0}(f(z+h) - f(z))/h$ existe.

3. Cierto o Falso

Nota: los incisos marcados con * son más dificiles.

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es contínua y $U \subset \mathbb{R}^2$ es abierto entonces $f(U)$ es abierto.
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es contínua y $U \subset \mathbb{R}^2$ es abierto entonces $f^{-1}(U)$ es abierto.
3. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ contiene un subconjunto abierto no vacío.
4. La frontera de un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es un cerrado.
5. La cerradura de la unión de dos conjuntos en $\mathbb{R}^2$ es la unión de sus cerraduras.
6. Si un conjunto en $\mathbb{R}^2$ no es cerrado entonces es abierto.
7. Existe en $\mathbb{R}^2$ un conjunto numerable cuya cerradura es todo $\mathbb{R}^2$.
8. * Existe una función contínua suprayectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
9. * Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es contínua y biyectiva entonces su inversa es contínua también.
10. La intersección de cualquier familia de abiertos en $\mathbb{R}^2$ es un abierto.
11. Existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(1,2) = 3$, $f_x(1,2) = 4$ y $f_y(1,2) = 5$.
12. Existe una función diferenciable dos veces $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = 3$, $f_{xx}(0,0) + f_{yy}(0,0) = 0$ y f no es un polinomio en dos variables.
13. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es contínua, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$ satisface $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \delta$ entonces $\|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})\| < 1$.
14. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\text{lím}_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
15. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\text{lím}_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$.
16. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces $\text{lím}_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})]/\|\mathbf{v}\|$ existe.
17. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable y $f(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $\frac{d}{dt}\|f(t)\| = \|\frac{d}{dt}f(t)\|$.
18. La superficie de un terreno está descrita por la ecuación $z = xy - x$. La coordenada z de un punto (x, y, z) de la superficie denota su altura. Estas en el punto de la superficie con coordenadas $(1, 1, 0)$, caminando hacia el noreste (tu proyección sobre el plano x, y avanza en la dirección del vector $(1, 1)$). Entonces tu camino está subiendo con una pendiente de 45 grados.
19. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 = 1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

20. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 = 1\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$.

    Nota: un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es acotado si existe un $M > 0$ tal que $\|\mathbf{v}\| \leq M$ para todo $\mathbf{v} \in C$.
21. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable con $df = 0$ entonces f es una función constante.
22. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $(2,3)$ entonces existen dos constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que el límite
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{f(x,y) - f(2,3) - (ax + by)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}} = 0.$$
23. Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - ax - by}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$
24. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ el límite
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy - ax - by}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}}$$
    no existe.
25. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en $(0,0)$ y $f(0,0) = 0$ entonces existe una función lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$
26. Sean f, g dos funciones diferenciables $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Entonces f/g es también diferenciable.
27. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es contínua si existen sus derivadas parciales f_x y f_y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
28. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función contínua entonces la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \int_x^y g(t)dt$ es diferenciable.
29. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Entonces su derivada $Df(\mathbf{x})$ no depende de $\mathbf{x}$.
30. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que su derivada $Df(\mathbf{x})$ no depende de $\mathbf{x}$. Entonces f es una transformación lineal.
31. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son funciones diferenciables tal que $Df(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces $f = g$.
32. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función contínua para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y diferenciable para todo $\mathbf{x} \neq (0,0)$ entonces f es también diferenciable en $(0,0)$.