Calculo III, ago-dic 2011.

Tarea num. 13
(Para el 17 nov, 2011)

Definicion. Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$. Una *elipse* con focos en F_1, F_2 y suma de distancias a los focos $d > \|F_1 - F_2\|$ es el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^2 | \|P - F_1\| + \|P - F_2\| = d\}$. El punto $(F_1 + F_2)/2$ es el *centro* de la elipse, la recta que pasa por F_1, F_2 es el *eje mayor*, y la recta ortogonal al eje mayor que pasa por el centro es el *eje menor*. Los ejes mayor y menor se llaman los *ejes principales* de la elipse. La intersección de la elipse con sus ejes son los *vértices* de la elipse. La distancia del centro a uno de los vértices lejanos se llama el *semi-eje mayor*. La distancia del centro a un vértice cercano es el *semi-eje menor*.

Nota: Si los focos coinciden ($F_1 = F_2$) la elipse es un círculo, los ejes principales y los vértices no están definidos en este caso y $d/2$ es el radio del c'rculo.

Problemas

1. Sea $c > 0$. Demuestra que la elipse con focos $(-c, 0), (c, 0)$ y suma de distancias a los focos $2a > 2c$ tiene ecuación $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, donde a es el semi-eje mayor, $b > 0$ es el semi-eje menor, dado por $b^2 = a^2 - c^2$.

2. *a*) Demuestra que una isometria de $\mathbb{R}^2$ manda una elipse a una elipse.

   Nota: una isometria de $\mathbb{R}^2$ es una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva distancias: $\|T(P) - T(Q)\| = \|P - Q\|$ para todo P, Q.

   b) Dada una elipse en $\mathbb{R}^2$, demuestra que existe una isometría de $\mathbb{R}^2$ que manda la elipse a una elipse del tipo del problema 1.

   Sugerencia: una traslación $P \mapsto P - P_0$ manda la elipse a una elipse centrada en el origen, luego una rotación, $(x, y) \mapsto (ax + by, -bx + ay)$ con $a^2 + b^2 = 1$, manda uno de los focos al eje de x. No se te olvide demostrar que translación y rotación son isometrías y que composición de isometrias es una isometría.

   c) Concluye del inciso anterior que toda elipse está dada por una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A, B, \ldots, F \in \mathbb{R}$ (una ecuación cuadrática).

   d) Encuentra un criterio en términos de los coeficientes de la $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ para decidir si esta ecuacion define una elipse.

   Respuesta: $4AC > B^2$ y $A > 0$.

   e) Mismo para $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

   Respuesta: $4AC > B^2$ y $A(CD^2 - BDE + AE^2 - F(AC - B^2)) > 0$.

3. Encuentra una ecuación cuadrática para la elipse que (i) pasa por $(3, 2), (4, 1)$, tiene centro en el origen y eje mayor horizontal; (ii) tiene ejes principales $y = \pm x$ y tangente a las rectas $y = 1$, $x + y = 1$; (iii) tiene focos en $(0, 0), (1, 0)$ y pasa por $(2, 0)$; (iv) es la imagen de la elipse anterior bajo la rotación por 30 grados en contra de las manecillas del reloj seguida por traslación por $(1, 1)$; (v) Es el conjunto de los puntos $P = (P_1 + 2P_2)/3$, donde $\|P_1 - P_2\| = 4$ y P_1 (resp. P_2) está sobre el eje de x (resp. eje de y). (vi) satisface la ecuación $Ax + By + Cr + D = 0$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $C^2 > A^2 + B^2$.

4. Encuentra los ejes prinicipales, centros, focos y vértices de las siguientes elipses: (i) $2x^2 + 3y^2 = 4$; (ii) $x^2 + xy + y^2 = 1$; (iii) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$.

5. *a*) Dada una elipse con focos F_1, F_2 y recta tangente l, sean d_1, d_2 las distancias de l a F_1, F_2 (resp.). Demuestra que el producto $m = d_1 d_2$ es independiente de l (es el mismo número para todas las rectas tangentes a la misma elipse).

   b) (Opcional) Dados dos puntos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y un número $m > 0$, consideramos el conjunto de todas las rectas l tal que (1) tiene a F_1 y F_2 al mismo lado de l, (2) el producto de las distancias de l a F_1, F_2 es m. Demuestra que este conjunto de rectas es la *envolvente* de una elipse con focos F_1, F_2. (La envolvente de una curva es el conjunto de todas las rectas tangentes a la curva).