Calculo III, ago-dic 2011.

Tarea num. 6
(Para el 29 sep, 2011)

Resumen de definiciones y resultados vistos en clase.

Definición. Una *curva paremetrizada* en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función $\gamma : (a, b) \to U$, donde $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Un *campo vectorial* en U es una función $v : U \to \mathbb{R}^n$. Una *curva integral* de v es una curva parametrizada diferenciable $\gamma : (a, b) \to U$ tal que $\gamma'(t) = v(\gamma(t))$ para todo $t \in (a, b)$.

Teorema (existencia y unicidad de curvas integrales de campos vectoriales). Dado un campo vectorial continuamente diferenciable v en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, un $\mathbf{x}_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una curva integral de v $\gamma : (a, b) \to U$ tal que $t_0 \in (a, b)$ y $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$. Además, si $\tilde{\gamma} : (\tilde{a}, \tilde{b}) \to U$ es otra curva integral de v tal que $t_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ y $\tilde{\gamma}(t_0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in (a, b) \cap (\tilde{a}, \tilde{b})$.

Nota: este teorema no fue demostrado en clase y se demuestra en el curso de ecuaciones diferenciales.

Definición. Un campo vectorial f en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es *conservativo* si $f = -\nabla V$ para una función diferenciable $V : U \to \mathbb{R}$, llamada un *potencial* para f. Una *trayectoria de una partícula con masa $m > 0$ bajo la influencia de f* es una curva parametrizada γ en U, dos veces diferenciable, tal que $m\gamma''(t) = f(\gamma(t))$ para todo $t \in (a, b)$ ("la segunda ley de Newton").

Definición. El *espacio fase* asociado con un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es el abierto $U_* = U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. La *curva fase* asociada con una curva parametrizada diferenciable γ en U es la curva parametrizada γ_* en U_* dada por $\gamma_*(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$.

Proposición. γ es la trayectoria de una partícula con masa $m > 0$ bajo la influencia de un campo vectorial f en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si γ_* es una curva integral del campo vectorial v_* en U_* dado por $v_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, f(\mathbf{x})/m)$.

Teorema ("conservación de energía"). Si f es un campo vectorial conservativo con potencial V en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ entonces para toda trayectoria $\gamma : (a, b) \to U$ de una partícula con masa $m > 0$ bajo la influencia de f, la función $E_\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $E(t) = V(\gamma(t)) + m\|\gamma'(t)\|^2/2$ es constante.

Reformulación: las curvas de fase de trayectorias de la partícula mueven dentro de los conjuntos de nivel de la función $E : U_* \to \mathbb{R}$ dada por $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = V(\mathbf{x}) + m\|\mathbf{y}\|^2/2$.

Problemas

1. Sea v el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ dado por $v(x, y) = (x, -y)$. (a) Dibuja a v en $\mathbb{R}^2$. (b) Encuentra una fórmula para la curva integral $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. (c) Dibuja estas curvas en el plano (¿qué forma tienen?).

2. Sea v el campo vectorial en $\mathbb{R}$ dado por $v(x) = x^2$. (a) Encuentra fórmula para la curva integral γ tal que $\gamma(0) = x_0$. (b) Demuestra que si $x_0 > 0$ la curva γ no puede ser definida para todo $t > 0$. (c) Dibuja todas las gráficas de las curvas integrales de v en el plano t, x.

   Respuesta para (a): $\gamma(t) = x_0/(1 - tx_0)$.

3. Considera una partícula de masa $m = 1$ que mueve a lo largo del eje de x bajo la influencia del campo vectorial $f(x) = -1$ ("caida libre", dibujando el eje de x verticalmente). (a) Dibuja el campo f a lo largo del eje de x. (b) Dibuja el campo fase asociado v_* en el plano fase $\mathbb{R}_* = \mathbb{R}^2$. (c) Encuentra un potencial V para f. (d) Dibuja las curvas de nivel de la función energía E en el plano fase. (e) Dibuja las curvas fases de las trayectorias de la particula en el plano fase. (f) Encuentra una fórmula para la trayectoria γ de la partícula tal que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = y_0$. (g) Repita los incisos anteriores para los siguientes campos: (i) $f(x) = -x$ ("resorte"); (ii) $f(x) = x$ ("equilibrio inestable"); (iii) $f(x) = -1/x^2$ ("aterrizaje duro"); (iv) $f(x) = -\operatorname{sen}(x)$ ("péndulo").

   Nota para (g)(iii) y (g)(iv): no tienes que hacer el (f) (es dificil, sobre todo el (iv)), pero el punto del ejercicio es que todavia puedes hacer facilmente el (e) usando el (d).

4. *a)* Demuestra: todo campo vectorial continuo en un abierto en $\mathbb{R}$ es conservativo.

   b) Encuentra un campo vectorial no conservativo en $\mathbb{R}^2$.
   Sugerencia: si $f = (u, v)$ es conservativo y dos veces continuamente diferenciable entonces $u_y = v_x$.

   c) (Opcional) Cierto o falso: el campo vectorial en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ dado por $f(x, y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ es conservativo.