CAPITULO 2

Ecuaciones y lugares geométricos

LOS DOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA SON:

1. Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

LUGAR GEOMETRICO, o gráfica, de una ecuación de dos variables es una línea, recta o curva, que contiene todos los puntos, y solo ellos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

Antes de representar gráficamente el lugar geométrico que corresponde a una ecuación dada, es muy conveniente, para determinar su forma, conocer algunas propiedades del lugar en cuestión, como, por ejemplo: intersecciones con los ejes, simetrías, campo de variación de las variables, etc.

INTERSECCIONES CON LOS EJES. Son las distancias (positivas o negativas) desde el origen hasta los puntos en los que la línea del lugar corta a los ejes coordenados.

Para hallar la intersección con el eje x se hace $y = 0$ en la ecuación dada y se despeja la variable x. Análogamente, para hallar la intersección con el eje y, se hace $x = 0$ y se despeja y.

Por ejemplo, en la ecuación $y^2 + 2x = 16$, para $y = 0$, $x = 8$; para $x = 0$, $y = \pm 4$. Por tanto, la abscisa del punto de intersección con el eje x es 8 y las ordenadas de los de intersección con el eje y son ± 4.

SIMETRIAS. Dos puntos son simétricos con respecto a una recta si ésta es la mediatriz del segmento que los une. Dos puntos son simétricos con respecto a otro punto, si éste es el punto medio del segmento que los une. En consecuencia:

1. Si una ecuación no se altera al sustituir x por $-x$, su representación gráfica, o lugar, es simétrica con respecto al eje y. A todo valor de y en esta ecuación, le corresponden dos valores iguales de x en valor absoluto pero de signos contrarios.

   Ejemplo: $x^2 - 6y + 12 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{6y - 12}$.

2. Si una ecuación no varía al sustituir y por $-y$, su representación gráfica, o lugar, es simétrica con respecto al eje x. A todo valor de x en esta ecuación le corresponden dos valores numéricamente iguales de y en valor absoluto pero de signos contrarios.

   Ejemplo: $y^2 - 4x - 7 = 0$, es decir, $y = \pm\sqrt{4x + 7}$.

3. Si una ecuación no varía al sustituir x por $-x$ e y por $-y$, su representación gráfica, o lugar, es simétrica con respecto al origen.

   Ejemplo: $x^3 + x + y^3 = 0$.

CAMPOS DE VARIACION. Los valores de una de las variables para los cuales la otra se hace imaginaria, carecen de sentido.

Sea la ecuación $y^2 = 2x - 3$, o bien, $y = \pm\sqrt{2x - 3}$. Si x es menor que 1,5, $2x - 3$ es negativo e y es imaginario. Por tanto, no se deben considerar los valores de x menores que 1,5 y, en consecuencia, la curva del lugar estará situada toda ella a la derecha de la recta $x = 1{,}5$.

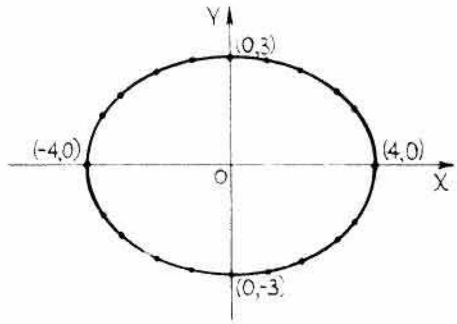
Despejando x, $x = \frac{1}{2}(y^2 + 3)$. Como x es real para todos los valores de y, la curva del lugar se extiende hasta el infinito, aumentando y a medida que lo hace x desde el valor $x = 1{,}5$.

PROBLEMAS RESUELTOS

LUGAR GEOMETRICO DE UNA ECUACION

1. Representar la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Intersecciones con los ejes. Para $y = 0$, $x = \pm 4$. Para $x = 0$, $y = \pm 3$. Por tanto, corta al eje x en los puntos de abscisa ± 4, y al eje y en los de ordenada ± 3.



Simetrías. Como la ecuación solo contiene potencias pares de x e y, la curva es simétrica con respecto a los dos ejes y, por tanto, con respecto al origen. Así, pues, basta con dibujar la porción de curva contenida en el primer cuadrante y trazar después el resto de ella por simetría.

Campo de variación. Despejando y y x,

$$y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}, \qquad x = \pm \frac{4}{3}\sqrt{9 - y^2}.$$

Si x es, *en valor absoluto*, mayor que 4, $16 - x^2$ es negativo e y es imaginario. Luego x no puede tomar valores mayores que 4 ni menores que -4, es decir, $4 \geqq x \geqq -4$. Análogamente, y no puede tomar valores mayores que 3 ni menores que -3, o sea, $3 \geqq y \geqq -3$.

x	0	± 1	± 2	± 3	$\pm 3{,}5$	± 4
y	± 3	$\pm 2{,}9$	$\pm 2{,}6$	$\pm 2{,}0$	$\pm 1{,}5$	0

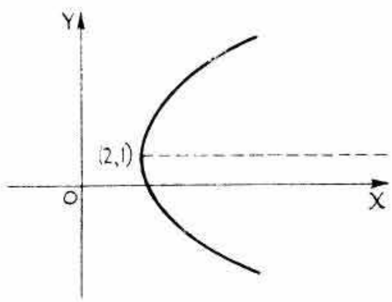
2. Representar la parábola de ecuación $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$.

Despejando y de la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ siendo } a = 1,\ b = -2,\ c = -4x + 9:$$

$$y = 1 \pm 2\sqrt{x - 2}. \quad (1)$$

Despejando x,
$$x = \frac{y^2 - 2y + 9}{4}. \quad (2)$$



Intersecciones con los ejes. Para $y = 0$, $x = 9/4$. Para $x = 0$, y es imaginario $(1 \pm 2\sqrt{-2})$. Por tanto, la curva corta al eje x en el punto de abscisa 9/4 y no corta al eje y.

Simetrías. La curva no es simétrica ni con respecto a los ejes ni con respecto al origen.
Es simétrica con respecto a la recta $y = 1$, con lo cual, a cada valor de x se obtienen dos de y, uno mayor que 1 y otro menor que 1.

Campos de variación. De (1) se deduce que si x es menor que 2, $x - 2$ es negativo e y imaginario. Por tanto, x no puede tomar valores menores que 2.
Análogamente, de (2) se deduce que como x es real para todos los valores de y, esta variable puede tomar todos los valores reales.

x	2	9/4	3	4	5	6
y	1	0; 2	3; -1	3,8; $-1{,}8$	4,5; $-2{,}5$	5; -3

3. Representar la hipérbola $xy - 2y - x = 0$.

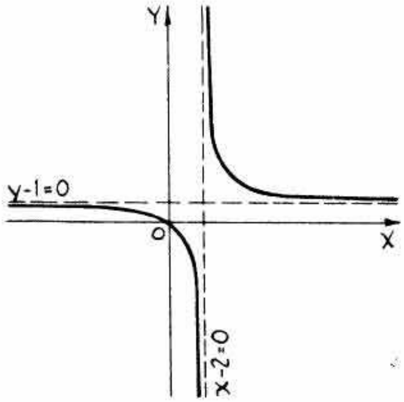
Intersecciones con los ejes. Para $x = 0$, $y = 0$; para $y = 0$, $x = 0$.

Simetrías. La curva no es simétrica ni con respecto a los ejes coordenados ni con respecto al origen.

Campos de variación. Despejando y, $y = \dfrac{x}{x-2}$, para $x = 2$, el denominador, $x - 2$, se anula e y se hace infinito.

Despejando x, $x = \dfrac{2y}{y-1}$. Para $y = 1$, el denominador, $y - 1$, se anula y x se hace infinito.

Ninguna de las dos variables se hace imaginaria para valores reales de la otra.



x	0	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	-1	-2	-3	-4
y	0	-1	-3	-7	∞	9	5	3	2	1,7	0,3	0,5	0,6	0,7

Cuando x tiende a 2 por la izquierda, y tiende a menos infinito. Cuando x tiende a 2 por la derecha, y tiende a más infinito. Las dos ramas de la curva se aproximan indefinidamente a la recta $x = 2$ haciéndose tangentes a ella en $\pm$ infinito. La recta $x - 2 = 0$ se denomina asíntota vertical de la curva.

Veamos qué ocurre cuando x tiende hacia infinito. Consideremos $y = \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x}}$.

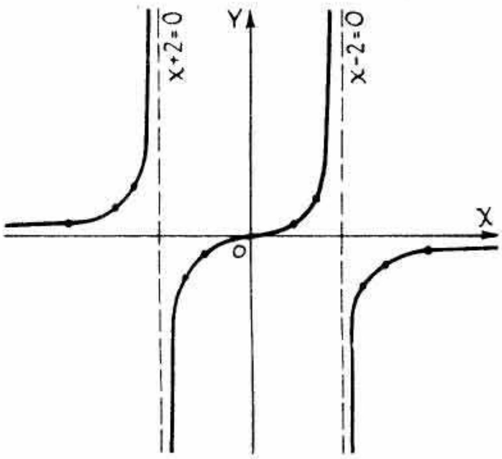
Cuando x tiende a más o menos infinito, $\dfrac{2}{x}$ tiende a cero e y tiende a 1. La recta $y - 1 = 0$ es una asíntota horizontal.

4. Representar la función

$$x^2y - 4y + x = 0.$$

Intersecciones con los ejes. Para $x = 0$, $y = 0$.
Para $y = 0$, $x = 0$.

Simetrías. Sustituyendo $-x$ por x, y $-y$ por y, se obtiene la ecuación $-x^2y + 4y - x = 0$, que multiplicada por -1 es la ecuación original. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al origen. No es simétrica con respecto a los ejes.



Campo de variación. Despejando y,

$$y = \frac{x}{4 - x^2} = \frac{x}{(2-x)(2+x)}.$$

Las asíntotas verticales son $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$.

Despejando x se obtiene, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y}$. La asíntota horizontal es $y = 0$.

Ninguna de las variables se hace imaginaria para valores reales de la otra.

x	-4	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	1,5	2	2,5	3	4
y	0,3	0,6	1,1	∞	$-0{,}9$	$-0{,}3$	0	0,3	0,9	∞	$-1{,}1$	$-0{,}6$	$-0{,}3$

5. Representar el lugar geométrico $x^2 - x + xy + y - 2y^2 = 0$.

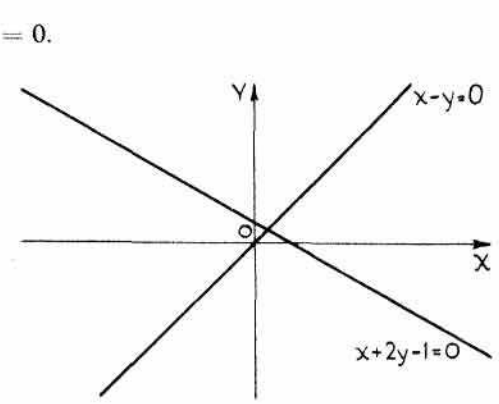
Algunas veces, una ecuación se puede descomponer en producto de varios factores y, en este caso, su gráfica consta de la correspondiente a cada uno de ellos.

Como la ecuación dada se descompone en los factores

$$(x - y)(x + 2y - 1) = 0,$$

su gráfica se compone de las dos rectas

$$x - y = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y - 1 = 0.$$



6. Determinar los puntos reales, si existen, que satisfacen las ecuaciones siguientes.

a) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = -5$.

b) $x^2 + y^2 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$.

d) $x^2 + 2y^2 - 6x + 11 = 0$.

e) $(x^2 - 4y^2)^2 + (x + 3y - 10)^2 = 0$.

f) $x^2 + (2i - 1)x - (6i + 5)y - 1 = 0$.

a) Como el cuadrado de todo número real es positivo, tanto $(x + 4)^2$ como $(y - 2)^2$ son positivos y, por tanto, la ecuación no se satisface para valores reales ni de x ni de y.

b) Es evidente que el único punto real que satisface a la ecuación dada es el origen (0, 0).

c) Escribiendo la ecuación en la forma $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = 0$, o bien, $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0$, cuando $x - 4 = 0$ e $y + 1 = 0$, es decir, para $x = 4$, $y = -1$, el único punto real que la satisface es el de coordenadas $(4, -1)$.

d) Escribiendo la ecuación dada en la forma $x^2 - 6x + 9 + 2y^2 + 2 = 0$, o bien, $(x - 3)^2 + 2y^2 + 2 = 0$, como $(x - 3)^2$, $2y^2$ y 2 son positivos para todos los valores reales de x e y, la ecuación dada no se satisface para valores reales de dichas variables.

e) La ecuación se satisface para los valores de x e y que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - 4y^2 = 0$ y $x + 3y - 10 = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos (4, 2) y $(-20, 10)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen la ecuación dada.

f) Agrupando las partes reales e imaginarias se obtiene $(x^2 - x - 5y - 1) + 2i(x - 3y) = 0$. Esta ecuación se satisface para los valores de x e y que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - x - 5y - 1 = 0$ y $x - 3y = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos (3, 1) y $(-1/3, -1/9)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen a la ecuación dada.

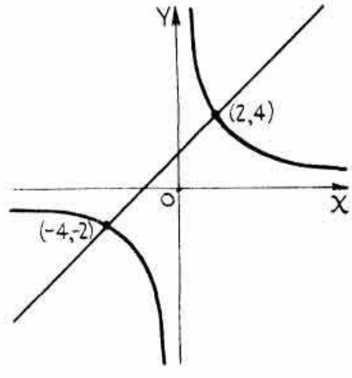
7. Resolver gráficamente el sistema formado por las ecuaciones siguientes y comprobar el resultado por vía algebraica.

$$xy = 8 \qquad (1)$$
$$x - y + 2 = 0 \qquad (2)$$

Despejando y en (1) se obtiene, $y = \dfrac{8}{x}$. Para $x = 0$, y es infinito.

Despejando x en (1) se obtiene, $x = \dfrac{8}{y}$. Para $y = 0$, x es infinito.

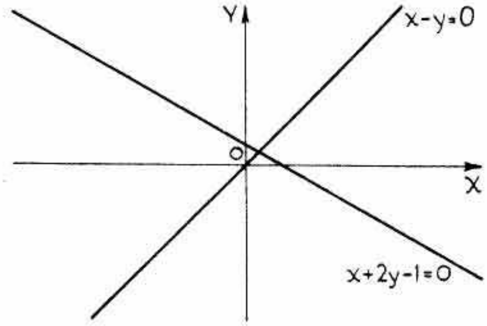
Por tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal y $x = 0$ una asíntota vertical.



x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
y	∞	8	4	8/3	2	-8	-4	$-8/3$	-2

La ecuación (2) representa una recta que corta a los ejes en los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$. Gráficamente se deducen las soluciones $(-4, -2)$ y $(2, 4)$.

5. Representar el lugar geométrico $x^2 - x + xy + y - 2y^2 = 0$.



Algunas veces, una ecuación se puede descomponer en producto de varios factores y, en este caso, su gráfica consta de la correspondiente a cada uno de ellos.

Como la ecuación dada se descompone en los factores

$$(x - y)(x + 2y - 1) = 0,$$

su gráfica se compone de las dos rectas

$$x - y = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y - 1 = 0.$$

6. Determinar los puntos reales, si existen, que satisfacen las ecuaciones siguientes.

a) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = -5$.
b) $x^2 + y^2 = 0$.
c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$.
d) $x^2 + 2y^2 - 6x + 11 = 0$.
e) $(x^2 - 4y^2)^2 + (x + 3y - 10)^2 = 0$.
f) $x^2 + (2i - 1)x - (6i + 5)y - 1 = 0$.

a) Como el cuadrado de todo número real es positivo, tanto $(x + 4)^2$ como $(y - 2)^2$ son positivos y, por tanto, la ecuación no se satisface para valores reales ni de x ni de y.

b) Es evidente que el único punto real que satisface a la ecuación dada es el origen (0, 0).

c) Escribiendo la ecuación en la forma $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = 0$, o bien, $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0$, cuando $x - 4 = 0$ e $y + 1 = 0$, es decir, para $x = 4$, $y = -1$, el único punto real que la satisface es el de coordenadas $(4, -1)$.

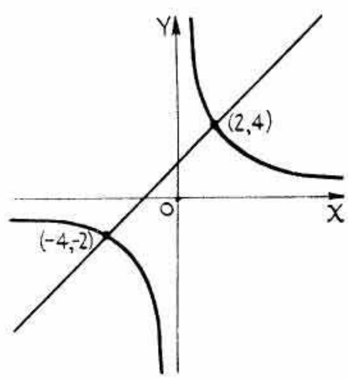
d) Escribiendo la ecuación dada en la forma $x^2 - 6x + 9 + 2y^2 + 2 = 0$, o bien, $(x - 3)^2 + 2y^2 + 2 = 0$, como $(x - 3)^2$, $2y^2$ y 2 son positivos para todos los valores reales de x e y, la ecuación dada no se satisface para valores reales de dichas variables.

e) La ecuación se satisface para los valores de x e y que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - 4y^2 = 0$ y $x + 3y - 10 = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos (4, 2) y $(-20, 10)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen la ecuación dada.

f) Agrupando las partes reales e imaginarias se obtiene $(x^2 - x - 5y - 1) + 2i(x - 3y) = 0$. Esta ecuación se satisface para los valores de x e y que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - x - 5y - 1 = 0$ y $x - 3y = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos (3, 1) y $(-1/3, -1/9)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen a la ecuación dada.

7. Resolver gráficamente el sistema formado por las ecuaciones siguientes y comprobar el resultado por vía algebraica.

$$xy = 8 \qquad (1)$$
$$x - y + 2 = 0 \qquad (2)$$



Despejando y en (1) se obtiene, $y = \dfrac{8}{x}$. Para $x = 0$, y es infinito.

Despejando x en (1) se obtiene, $x = \dfrac{8}{y}$. Para $y = 0$, x es infinito.

Por tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal y $x = 0$ una asíntota vertical.

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
y	∞	8	4	8/3	2	-8	-4	$-8/3$	-2

La ecuación (2) representa una recta que corta a los ejes en los puntos $(-2, 0)$ y (0, 2). Gráficamente se deducen las soluciones $(-4, -2)$ y (2, 4).

Solución algebraica. De (2), $y = x + 2$.

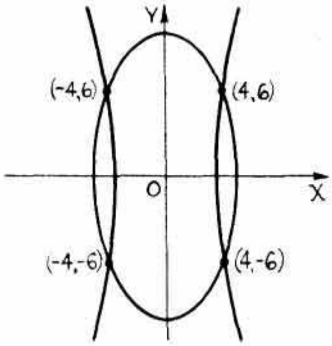
Sustituyendo en (1), $x(x + 2) = 8$, es decir, $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Descomponiendo en factores, $(x + 4)(x - 2) = 0$. Por tanto, $x = -4$ y $x = 2$.

Como $y = x + 2$, $y = -2$ para $x = -4$ e $y = 4$ para $x = 2$.

8. Resolver gráficamente el sistema de ecuaciones siguiente y comprobar su solución por vía algebraica.

$$4x^2 + y^2 = 100 \qquad (1)$$
$$9x^2 - y^2 = 108 \qquad (2)$$



Ambas curvas son simétricas con respecto a los ejes y al origen.

Despejando y en (1) se obtiene, $y = \pm\sqrt{100 - 4x^2}$. Luego x no puede tomar valores mayores que 5 ni menores que -5.

Despejando x en (1) se obtiene, $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{100 - y^2}$. Luego y no puede tomar valores mayores que 10 ni menores que -10.

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
y	± 10	$\pm 9{,}8$	$\pm 9{,}2$	± 8	± 6	0

Despejando y en (2) se obtiene, $y = \pm 3\sqrt{x^2 - 12}$. Luego x no puede tomar valores comprendidos entre $\sqrt{12}$ y $-\sqrt{12}$.

Despejando x en (2) se obtiene, $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{y^2 + 108}$. Luego y puede tomar cualquier valor.

x	$\pm\sqrt{12}$	± 4	± 5	± 6
y	0	± 6	$\pm 10{,}8$	$\pm 14{,}7$

Gráficamente se deducen las soluciones $(4, \pm 6)$, $(-4, \pm 6)$.

Solución algebraica.
$$\begin{array}{r} 4x^2 + y^2 = 100 \\ \underline{9x^2 - y^2 = 108} \\ 13x^2 = 208, \quad x^2 = 16, \text{ y } x = \pm 4. \end{array}$$
$$y^2 = 9x^2 - 108 = 144 - 108 = 36, \text{ e } y = \pm 6.$$

ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO.

9. Hallar la ecuación de la recta que sea,

a) paralela al eje y y que corte al eje x cinco unidades a la izquierda del origen.
b) paralela al eje x y que corte al eje y siete unidades por encima del origen.
c) paralela y a la derecha de la recta $x + 4 = 0$ y que diste de ella 10 unidades.
d) paralela y por debajo de la recta $y = 2$ y que diste de ella 5 unidades.
e) paralela a la recta $y + 8 = 0$ y que diste 6 unidades del punto (2, 1).
f) perpendicular a la recta $y - 2 = 0$ y que diste 4 unidades del punto $(-1, 7)$.

a) $x = -5$, es decir, $x + 5 = 0$. Esta es la ecuación de la recta que es paralela al eje y y que está situada 5 unidades a su izquierda.

b) $y = 7$, es decir, $y - 7 = 0$. Esta es la ecuación de la recta que es paralela al eje x y que está situada 7 unidades por encima del origen.

c) $x = -4 + 10$, es decir, $x = 6$. Esta es la ecuación de la recta situada 10 unidades a la derecha de la recta $x + 4 = 0$. Es paralela al eje y y está situada 6 unidades a su derecha.

d) $y = 2 - 5$, es decir, $y = -3$. Esta es la ecuación de la recta situada 5 unidades por debajo de la recta $y - 2 = 0$. Es paralela al eje x y está a 3 unidades por debajo de él.

e) Como la recta $y + 8 = 0$ es paralela al eje x, las dos rectas pedidas también lo serán y estarán situadas 6 unidades por debajo y por encima, respectivamente, de la recta $y = 1$. Luego $y = 1 \pm 6$, es decir, $y = 7$ e $y = -5$.

f) Como la recta $y - 2 = 0$ es paralela al eje x, las dos rectas pedidas también lo serán y estarán a 4 unidades de la derecha o a la izquierda de la recta $x = -1$. Luego $x = -1 \pm 4$, es decir, $x = 3$ y $x = -5$.

10. Hallar la ecuación de la recta que sea,

a) paralela al eje x y que diste 5 unidades del punto $(3, -4)$,
b) equidistante de las rectas $x + 5 = 0$ y $x - 2 = 0$,
c) que diste tres veces más de la recta $y - 9 = 0$ que de $y + 2 = 0$.

Sea (x, y) un punto genérico de la recta pedida.

a) $y = -4 \pm 5$, es decir, $y = 1$ e $y = -9$.

b) $\dfrac{5 + x}{2 - x} = 1$, o sea, $x = \dfrac{-5 + 2}{2} = -\dfrac{3}{2}$, o bien, $2x + 3 = 0$.

c) $\dfrac{y + 2}{9 - y} = \pm\dfrac{1}{3}$. Simplificando, $4y - 3 = 0$ y $2y + 15 = 0$.

Para la recta $4y - 3 = 0$, situada entre las dos dadas, la relación es $+\frac{1}{3}$. Para la recta $2y + 15 = 0$ situada por debajo de ellas, la relación es $-\frac{1}{3}$.

11. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de $A(-2, 3)$ y $B(3, -1)$.

$PA = PB$, es decir, $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2}$.

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene, $10x - 8y + 3 = 0$. Esta es la ecuación de la mediatriz del segmento que une los dos puntos dados.

12. Hallar la ecuación de la recta que pase,

a) por el punto $(-4, 5)$ y cuya pendiente sea $2/3$.
b) por los puntos $(3, -1)$ y $(0, 6)$.

Sea (x, y) un punto genérico de la recta pedida.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

a) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-4, 5)$ y (x, y) es $\dfrac{2}{3}$.

Por tanto, $\dfrac{y - 5}{x + 4} = \dfrac{2}{3}$. Simplificando, $2x - 3y + 23 = 0$.

b) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3, -1)$ y $(0, 6)$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0, 6)$ y (x, y).

Por tanto, $\dfrac{6 + 1}{0 - 3} = \dfrac{y - 6}{x - 0}$. Simplificando, $7x + 3y - 18 = 0$.

13. Hallar la ecuación de la recta que pase,

a) por el punto $(2, -1)$ y sea perpendicular a la recta que une los puntos $(4, 3)$ y $(-2, 5)$.
b) por el punto $(-4, 1)$ y sea paralela a la recta que une los puntos $(2, 3)$ y $(-5, 0)$.

a) Si dos rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco, con signo contrario, de la pendiente de la otra.

Pendiente de la recta que pasa por $(4, 3)$ y $(-2, 5) = \dfrac{5-3}{-2-4} = -\dfrac{1}{3}$.

Pendiente de la recta pedida = recíproco con signo contrario de $-\dfrac{1}{3} = 3$.

Sea (x, y) un punto genérico de la recta pedida. La pendiente de la recta que pasa por (x, y) y $(2, -1)$ es $\dfrac{y+1}{x-2} = 3$. Simplificando, $3x - y - 7 = 0$.

b) Si las dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.

Sea (x, y) un punto genérico de la recta pedida.

Pendiente de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(-5, 0)$ = pendiente de la recta que pasa por (x, y) y $(-4, 1)$.

Por tanto, $\dfrac{3-0}{2+5} = \dfrac{y-1}{x+4}$. Simplificando, $3x - 7y + 19 = 0$.

14. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $C(2, -1)$ sea igual a 5.

Distancia $PC = 5$, es decir, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 5$.

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene la ecuación del lugar pedido, $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$.
Este lugar es una circunferencia de centro el punto $(2, -1)$ y de radio 5.

15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos $A(0, 0)$ y $B(2, -4)$ sea igual a 20.

$(PA)^2 + (PB)^2 = 20$, o bien, $x^2 + y^2 + [(x-2)^2 + (y+4)^2] = 20$.

Simplificando, $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Esta es la ecuación de una circunferencia de diámetro AB.

16. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes coordenados sea igual al cuadrado de sus distancias al origen.

Distancia de $P(x, y)$ al eje y + distancia al eje x = cuadrado de distancia al $(0, 0)$.

Luego $x + y = x^2 + y^2$, o bien, $x^2 + y^2 - x - y = 0$. Esta es la ecuación de una circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

17. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya relación de distancias a la recta $y - 4 = 0$ y al punto $(3, 2)$ sea igual a 1.

$$\frac{\text{Distancia de } P(x, y) \text{ a } y - 4 = 0}{\text{Distancia de } P(x, y) \text{ a } (3, 2)} = 1, \text{ o sea, } \frac{4-y}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}} = 1.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $(4-y)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$, o bien, $x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Esta es la ecuación de una parábola.

18. Dados dos puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(5, -3)$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de manera que la pendiente de PP_1 sea igual a la pendiente de PP_2 más la unidad.

Pendiente de PP_1 = pendiente de $PP_2 + 1$, o sea, $\dfrac{y-4}{x-2} = \dfrac{y+3}{x-5} + 1.$

Simplificando, $x^2 + 3y - 16 = 0$, que es la ecuación de una parábola.

19. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ equidistantes del punto fijo $F(3, 2)$ y del eje y.

$PF = x$, es decir, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = x$, o sea, $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2$.

Simplificando, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$, que es la ecuación de una parábola.

20. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F_1(1, 4)$ y $F_2(1, -4)$ sea igual a 6.

$PF_1 - PF_2 = 6$, es decir, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} = 6$.

Pasando un radical al segundo miembro,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = 6 + \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2}.$$

Elevando al cuadrado, $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 36 + 12\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16$.

Simplificando, $4y + 9 = -3\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2}$.

Elevando al cuadrado, $16y^2 + 72y + 81 = 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 + 72y + 144$.

Simplificando, $9x^2 - 7y^2 - 18x + 72 = 0$, ecuación de una hipérbola.

PROBLEMAS PROPUESTOS

LUGAR GEOMETRICO DE UNA ECUACION.

Trazar la gráfica de las ecuaciones 1 — 18.

1. $x^2 + 2x - y + 3 = 0$

2. $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 29 = 0$

4. $2x^2 + 3y^2 - 18 = 0$

5. $3x^2 + 5y^2 = 0$

6. $4y^2 - x^3 = 0$

7. $(xy - 6)^2 + (x^2 + 3xy + y^2 + 5) = 0$

8. $8y - x^3 = 0$

9. $y^2 = x(x-2)(x+3)$

10. $y = x(x+2)(x-3)$

11. $(x^2 + 2xy - 24)^2 + (2x^2 + y^2 - 33)^2 = 0$

12. $x^2y + 4y - 8 = 0$

13. $x^2y^2 + 4x^2 - 9y^2 = 0$

14. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$

15. $2x^2 + y^2 - 2y^2 i + x^2 i - 54 - 17i = 0$

16. $y(x+2)(x-4) - 8 = 0$

17. $x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y = 0$

18. $(x^2 - y) - yi = (5 - 2x) + 3(1 - x)\, i$

Representar los siguientes pares de ecuaciones y resolver gráficamente el sistema que forman. Comprobar algebraicamente los resultados.

19. $y = x^2$, $x - y + 2 = 0$. *Sol.* $(2, 4), (-1, 1)$.

20. $4y - x^2 = 0$, $x^2y + 4y - 8 = 0$. *Sol.* $(2, 1), (-2, 1)$, las otras son imaginarias.

21. $x^2 + y^2 - 20 = 0$, $y^2 - 2x - 12 = 0$. *Sol.* $(2, \pm 4), (-4, \pm 2)$.

22. $y^2 - 2x - 5 = 0$, $3x^2 - 2y^2 - 1 = 0$. *Sol.* $(2{,}7, \pm 3{,}2), (-1{,}4, \pm 1{,}5)$.

23. $y^2 - 4x - 9 = 0$, $x^2 + 2y - 6 = 0$. *Sol.* $(-2, 1), (-2, 1), (4, -5), (0, 3)$.

24. $2x^2 + y^2 - 6 = 0$, $x^2 - y^2 - 4 = 0$. *Sol.* Imaginarias.

25. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 5 = 0$. *Sol.* $(2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2)$.

26. $x^2 - y^2 + x - y = 0$, $x^2 - 2xy - 3x + 6y = 0$. *Sol.* $(3, -4), (-2/3, -1/3), (3, 3), (0, 0)$.

ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO.

27. Hallar la ecuación de la recta:

a) Situada 3 unidades a la derecha del eje y. *Sol.* $x - 3 = 0$

b) Situada 5 unidades por debajo del eje x. *Sol.* $y + 5 = 0$

c) Paralela al eje y y a 7 unidades del punto $(-2, 2)$. *Sol.* $x - 5 = 0$, $x + 9 = 0$.

d) Situada 8 unidades a la izquierda de la recta $x = -2$. *Sol.* $x + 10 = 0$

e) Paralela al eje x y mediatriz del segmento determinado por $(2, 3)$ y $(2, -7)$. *Sol.* $y + 2 = 0$

f) Que diste 4 veces más de la recta $x = 3$ que de $x = -2$. *Sol.* $3x + 11 = 0$, $x + 1 = 0$.

g) Que pase por el punto $(-2, -3)$ y sea perpendicular a la recta $x - 3 = 0$. *Sol.* $y + 3 = 0$

h) Que equidiste de los ejes coordenados. *Sol.* $y - x = 0$, $y + x = 0$.

i) Que pase por el punto $(3, -1)$ y sea paralela a la recta $y + 3 = 0$. *Sol.* $y + 1 = 0$

j) Que equidiste de las rectas $y - 7 = 0$ e $y + 2 = 0$. *Sol.* $2y - 5 = 0$

28. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ sea igual a 4. *Sol.* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

29. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidisten de los puntos fijos $(-3, 1)$ y $(7, 5)$. *Sol.* $5x + 2y - 16 = 0$.

30. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuyas distancias al punto fijo $(3, 2)$ sean la mitad de sus distancias al $(-1, 3)$. *Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 26x - 10y + 42 = 0$.

31. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidisten del punto $(2, 3)$ y de la recta $x + 2 = 0$. *Sol.* $y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$.

32. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto $(3, 5)$ y sea tangente a la recta $y - 1 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$.

33. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos fijos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ sea igual a $2a$, $(2a > 2c)$. *Sol.* $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$.

34. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos $(2, 3)$ y $(2, -3)$ sea igual a 8. *Sol.* $16x^2 + 7y^2 - 64x - 48 = 0$.

35. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos (3, 2) y (—5, 2) sea igual a 6. *Sol.* $7x^2 - 9y^2 + 14x + 36y - 92 = 0$.

36. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y + 4 = 0$ sea igual a los dos tercios de su distancia al punto (3, 2). *Sol.* $4x^2 - 5y^2 - 24x - 88y - 92 = 0$.

37. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (—2, 2) sea tres veces su distancia a la recta $x - 4 = 0$. *Sol.* $8x^2 - y^2 - 76x + 4y + 136 = 0$.

38. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a los ejes coordenados sea igual a 9. *Sol.* $x^2 + y^2 = 9$.

39. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos de coordenadas (—3, 2) y (5, —4). *Sol.* $4x - 3y = 7$.

40. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que disten 3 unidades del origen de coordenadas. *Sol.* $x^2 + y^2 = 9$.

41. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (2, 3) y que pase por el punto (5, —1).
Sol. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

42. Dados los puntos $A(0, -2)$, $B(0, 4)$ y $C(0, 0)$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de manera que el producto de las pendientes de PA y PB sea igual a la pendiente de PC.
Sol. $y^2 - xy - 2y - 8 = 0$.

43. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de 12 unidades de longitud cuyos extremos se apoyan constantemente en los ejes coordenados. *Sol.* $x^2 + y^2 = 36$.

44. Dados los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, 1)$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de manera que la pendiente de PA sea el recíproco, con signo contrario, de la pendiente de PB.
Sol. $x^2 + y^2 - x - 4y - 3 = 0$.