

Tarea 17

En esta tarea practicamos *traslación de figuras*. El principio básico es lo siguiente: Si una figura C en el plano está dada por la ecuación $F(x, y) = 0$, entonces la ecuación $F(x - x_0, y - y_0) = 0$ describe una figura C' que se obtiene de C al trasladarla por el vector (x_0, y_0) . En otras palabras, las soluciones de $F(x - x_0, y - y_0) = 0$ se obtienen al tomar cada punto (x, y) que satisface $F(x, y) = 0$ y mandarlo al punto $(x + x_0, y + y_0)$. La transformación que manda $(x, y) \mapsto (x + x_0, y + y_0)$ se llama *traslación por* (x_0, y_0) .

Por ejemplo, el círculo $C' = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1\}$ se obtiene del círculo $C = \{(x, y) | (x)^2 + (y)^2 = 1\}$ al trasladarlo por $(1, -2)$.

Otro ejemplo: la ecuación $y^2 + 2y + x = 0$ describe una parábola C que pasa por el origen pero que su vértice no está en el origen. Queremos encontrar una traslación que manda esta parábola a una parábola con vértice en el origen. Para esto, re-escribimos primero la ecuación de C como $(y + 1)^2 + (x - 1) = 0$, así que la traslación por $(-1, 1)$, $(x, y) \mapsto (x - 1, y + 1)$, manda la parábola C a la parábola $y^2 + x = 0$, o $y^2 = -x$, la cual es una parábola con vértice en $(0, 0)$.

Los problemas

Hay que encontrar en cada caso una traslación $(x, y) \mapsto (x + x_0, y + y_0)$ que satisface cierto requisito. También hay que escribir la ecuación de la figura trasladada.

1. Manda el círculo $x^2 + y^2 = 1$ a un círculo con centro en $(2, 3)$.
2. Manda el círculo $x^2 + y^2 = 1$ a un círculo que pasa por $(0, 0)$ y su centro está sobre el eje de y .
3. Manda el círculo $x^2 + y^2 = 1$ a un círculo que pasa por $(2, 3)$ y su centro está sobre la recta $x = y$.
4. Manda la parábola $y^2 = 4ax$ a una parábola con foco en $(0, 0)$.
5. Manda la curva dada por la ecuación $5x^2 + 4x + 3y^2 + 2y + 1 = 0$ a una curva con ecuación que no tiene términos lineales (términos del tipo $ax + by$).
6. Manda la elipse $2x^2 + 3y^2 = 4$ a una elipse con foco en $(0, 0)$. (Hay dos soluciones).
7. Manda la recta $x = y$ a una recta tangente a la parábola $y = x^2$. (Hay una infinidad de soluciones.)
8. Manda la parábola $y = x^2$ a una parábola perpendicular a la parábola $y = -x^2$. (Sugerencia: problema 3 del parcial num. 2).

Algunas respuestas: 3. Traslación por $(2, 2)$ o $(3, 3)$, que manda la figura a $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ o $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$. 4. Traslación por $(-a, 0)$, que manda la parábola a $y^2 = 4a(x + a)$. 7. Traslación por $(a + 1/2, a + 1/4)$, que manda la recta $x = y$ a la recta $y = x - 1/4$.