Capítulo 6

Derivación de funciones implícitas

FUNCION IMPLICITA. Cuando una ecuación, definida en el campo de variación de sus variables se escribe en la forma $f(x, y) = 0$ se dice que y es una función implícita de x.

Ejemplo 1:

(*a*) La ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$, siendo $x \neq 2$, define la función $y = \dfrac{1-x}{x-2}$

(*b*) La ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ define la función $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ cuando $|x| \leq 3$ e $y \geq 0$ y la función $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ cuando $|x| \leq 3$ e $y \leq 0$.

Obsérvese que la elipse se puede considerar formada por dos arcos unidos en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$.

Para hallar la derivada y' se puede seguir uno de los procedimientos que se detallan a continuación:

(*a*) Despejar y, si es posible, y derivar con respecto a x. Este procedimiento se debe evitar, a menos que se trate de una ecuación muy sencilla.

(*b*) Derivar la ecuación dada con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x, y despejar y'. Esta forma de efectuar la derivación recibe el nombre de *derivación implícita*.

Ejemplo 2:

(*a*) Hallar y', en la ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$.

$$\text{Tendremos } x \cdot \frac{d}{dx}(y) + y \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x) - 2 \cdot \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$$

o bien $xy' + y + 1 - 2y' = 0$; por tanto, $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$.

(*b*) Hallar y', cuando $x = \sqrt{5}$, en la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

$$\text{Tendremos, } 4 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + 9 \cdot \frac{d}{dx}(y^2) = 8x + 9 \cdot \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 8x + 18yy' = 0 \text{ e } y' = -\frac{4x}{9y}.$$

Para $x = \sqrt{5}$, $y = \pm 4/3$. En el punto $(\sqrt{5}, 4/3)$ del arco superior de la elipse, $y' = -\sqrt{5}/3$, y en el punto $(\sqrt{5}, -4/3)$ del arco inferior, $y' = \sqrt{5}/3$.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. Se pueden calcular por uno de los procedimientos siguientes:

(*a*) Derivar implícitamente la primera derivada y en el resultado, sustituir el valor de y' previamente calculado, repitiendo después la misma marcha.

Ejemplo 3: En el Ejemplo 2(*a*), $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(y') = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\dfrac{1+y}{2-x}\right) + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

(*b*) Derivar implícitamente la ecuación dada cuantas veces sea necesario hasta que aparezca la derivada que se quiere obtener, eliminando, acto seguido, todas las derivadas de orden inferior. Este procedimiento es el más recomendable cuando se trate de hallar una derivada de orden superior en un punto.

Ejemplo 4: Calcular el valor de y'' en el punto $(-1,1)$ en la curva $x^2y + 3y - 4 = 0$.
Derivando implícitamente con respecto a x dos veces, se obtiene,

$$x^2y' + 2xy + 3y' = 0 \text{ y } x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0$$

Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$ en la primera relación, obtenemos $y' = \frac{1}{2}$.
Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$, $y' = \frac{1}{2}$ en la segunda relación, obtenemos $y'' = 0$.

Problemas resueltos

1. Hallar y', en la ecuación $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0 \quad \text{e} \quad y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$$

2. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$.

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x - xy' - y + 2yy' = 0 \quad \text{e} \quad y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

$$y'' = \frac{(x-2y)\frac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y)\frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} = \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^3} = \frac{18}{(x-2y)^3}$$

3. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^3y + xy^3 = 2$ para $x = 1$.

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

y

$$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$$

Cuando $x = 1$, $y = 1$; sustituyendo en la primera ecuación, $y' = -1$.

Sustituyendo $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$ en la segunda ecuación, $y'' = 0$.

Problemas propuestos

4. Deducir la Fórmula 10, Capítulo 5, para $m = p/q$, siendo p y q números enteros, escribiendo $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivando con respecto a x.

5. Hallar y'', en las ecuaciones (*a*) $x + xy + y = 2$, (*b*) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$. *Sol.* $y'' = \dfrac{2(1+y)}{(1+x)^2}$, (*b*) $y'' = -\dfrac{4xy}{(y^2-x)^3}$

6. Hallar y', y'', e y''' en (*a*) el punto (2, 1) de $x^2 - y^2 - x = 1$, (*b*) el punto (1, 1) de $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.
Sol. (*a*) 3/2, —5/4, 45/8; (*b*) 1, 0, 0

7. Hallar la pendiente de la tangente en el punto (x_0, y_0) de (*a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (*b*) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (*c*) $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0$. *Sol.* (*a*) $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (*b*) $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (*c*) $\dfrac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$

8. Demostrar que las curvas $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ y $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ se cortan en ángulo recto en el origen.

9. (*a*) El área total de un paralelepípedo recto cuya base es un cuadrado de lado y de altura x viene dada por $S = 2y^2 + 4xy$. Suponiendo que S es constante, calcular dy/dx sin despejar y.

(*b*) El área total de un cilindro recto circular de radio r y altura h viene dada por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Suponiendo que S es constante, calcular dr/dh. *Sol.* (*a*) $-\dfrac{y}{x+y}$; (*b*) $-\dfrac{r}{2r+h}$

10. En la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, demostrar que $\left|\dfrac{y''}{\{1+(y')^2\}^{3/2}}\right| = \dfrac{1}{r}$.

11. Siendo $S = \pi x(x + 2y)$ y $V = \pi x^2y$, demostrar que $dS/dx = 2\pi(x - y)$ cuando V es constante, y que $dV/dx = -\pi x(x-y)$ cuando S es constante.

Capítulo 7

Tangente y Normal

SI LA FUNCION $f(x)$ posee derivada finita, $f'(x_0)$, en el punto $x = x_0$, la curva $y = f(x)$ tiene una tangente en $P_0(x_0, y_0)$ cuya pendiente es

$$m = \operatorname{tag} \theta = f'(x_0)$$

Si $m = 0$, la curva tiene una tangente horizontal de ecuación $y = y_0$ en P_0, puntos A, C y E de la Fig. 7-1. En los demás casos la ecuación de la tangente en un punto a una curva es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Si $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$, pero $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ la curva tiene una tangente vertical de ecuación $x = x_0$, puntos B y D de la Figura 7-1.

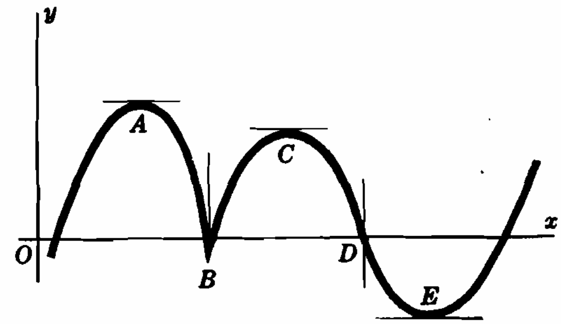

Fig. 7-1

La *normal* a una curva en uno de sus puntos es la recta que pasando por dicho punto es perpendicular a la tangente en él. La ecuación de la normal en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es

$x = x_0$, si la tangente es horizontal

$y = y_0$, si la tangente es vertical;

en los demás casos,

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

(Ver Problemas 1-9.)

EL ANGULO DE INTERSECCION de dos curvas se define por el formado por sus tangentes en el punto de intersección.

Para hallar los ángulos de intersección de dos curvas:

(1) Se calculan los puntos de intersección, resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

(2) Se hallan las pendientes m_1 y m_2 de las tangentes a las curvas en cada uno de los puntos de intersección.

(3) Si $m_1 = m_2$, el ángulo de intersección es $\phi = 0°$,
si $m_1 = -1/m_2$, el ángulo de intersección es $\phi = 90°$;

en los demás casos, $$\operatorname{tag} \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Si $\operatorname{tag} \phi > 0$, el ángulo agudo de intersección es ϕ y
si $\operatorname{tag} \phi < 0$, el ángulo agudo de intersección es $180° - \phi$.

(Ver Problemas 10-12.)

LONGITUDES DE TANGENTE NORMAL, SUBTANGENTE Y SUBNORMAL. La *longitud de tangente* a una curva en uno de sus puntos se define como la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x recibe el nombre de *longitud de subtangente.*

La *longitud de normal* se define como la longitud del segmento de normal comprendido entre el punto de tangencia y el eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x recibe el nombre de *longitud de subnormal.*

Longitud de la subtangente $= TS = y_0/m$

Longitud de la subnormal $= SN = my_0$

Longitud de la tangente

$$= TP_0 = \sqrt{(TS)^2 + (SP_0)^2}$$

Longitud de la normal

$$= P_0N = \sqrt{(SN)^2 + (SP_0)^2}$$

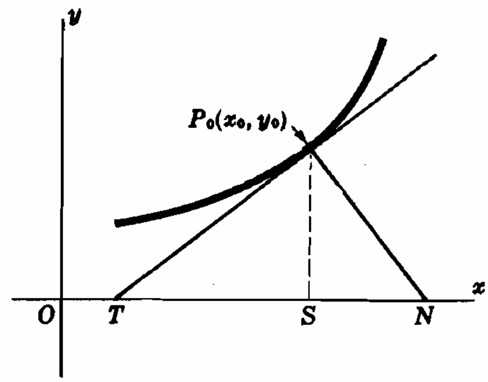

Fig. 7-2

Nota. Las longitudes de subtangente y subnormal son segmentos dirigidos. Algunos autores solamente consideran sus módulos, $|y_0/m|$ y $|my_0|$ respectivamente. Por ello, en las soluciones de los problemas no se han tenido en cuenta más que dichos módulos.

(Ver Problema 13.)

Problemas resueltos

1. Calcular los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 27$ en los que las tangentes son horizontales y verticales.

Derivando, $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$.

Tangentes horizontales: Igualando a cero el numerador de y', obtenemos $y = 2x$. Los puntos de tangencia son los de intersección de la recta $y = 2x$ con la curva dada. Resolviendo el sistema se obtienen los puntos (3,6) y (—3, —6).

Tangentes verticales: Igualando a cero el denominador de y' resulta $x = 2y$. Los puntos de tangencia son los de intersección de la recta $x = 2y$ con la curva dada. Resolviendo el sistema se obtienen los puntos (6, 3) y (—6, —3).

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ en el punto (2, 4).

$f'(x) = 3x^2 - 4x$; la pendiente de la tangente en el punto (2, 4) es $m = f'(2) = 4$.

La ecuación de la tangente es $y - 4 = 4(x - 2)$, o bien, $y = 4x - 4$.

La ecuación de la normal es $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$, o bien, $x + 4y = 18$.

3. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en el punto (1, 1).

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + 3y}{3x + 2y}$. La pendiente de la tangente en el punto (1, 1) es $m = -1$.

La ecuación de la tangente es $y - 1 = -1(x - 1)$, o bien, $x + y = 2$.

La ecuación de la normal es $y - 1 = 1(x - 1)$, o bien, $x - y = 0$.

4. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$, de pendiente $m = -2/9$.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia de la tangente buscada. Se tiene,

(*a*) $4x_0^2 + 9y_0^2 = 40$, puesto que P_0 es un punto de la elipse.

(*b*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{9y}$. Para (x_0, y_0), $m = -\dfrac{4x_0}{9y_0} = -\dfrac{2}{9}$, con lo que $y_0 = 2x_0$.

(*c*) Los puntos de tangencia son las soluciones del sistema de ecuaciones (*a*) y (*b*). Resolviendo dicho sistema se obtienen los puntos (1, 2) y (—1, —2).

La ecuación de la tangente en el punto (1, 2) es $y - 2 = -2/9(x - 1)$, o bien, $2x + 9y = 20$.

La ecuación de la tangente en el punto (—1 —2) es $y + 2 = -2/9(x + 1)$, o bien, $2x + 9y = -20$.

5. Hallar la ecuación de la tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(2, -2)$.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia de la recta buscada. Se tiene,

(*a*) $x_0^2 - y_0^2 = 16$, puesto que P_0 es un punto de la hipérbola.

(*b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$. Para (x_0, y_0), $m = \dfrac{x_0}{y_0} = \dfrac{y_0 + 2}{x_0 - 2}$ = pendiente de la recta que une P_0 con $(2, -2)$; por tanto,

$$2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16 \quad \text{o sea} \quad x_0 + y_0 = 8$$

(*c*) El punto de tangencia es la solución del sistema de ecuaciones (*a*) y (*b*). Resolviendo dicho sistema resulta el punto $(5, 3)$. La ecuación de la tangente es $y - 3 = \frac{5}{3}(x - 5)$, o bien $5x - 3y = 16$.

6. Hallar las ecuaciones de las rectas verticales que pasan por los puntos de las curvas (*1*) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ y (*2*) $3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$, en los que las tangentes a ellas son paralelas.

Sea $x = x_0$ la ecuación de la recta buscada.

En (*1*): $y' = 3x^2 + 4x - 4$; para $x = x_0$, $m = 3x_0^2 + 4x_0 - 4$.

En (*2*): $3y' = 6x^2 + 18x - 3$; para $x = x_0$, $m = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$.

Igualando $3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$, $x_0 = -1$ y 3. Las rectas son $x = -1$ y $x = 3$.

(*a*) Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ de pendiente $m \neq 0$ es $y = mx + p/m$.

(*b*) Demostrar que la ecuación de la tangente de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$

(*a*) $y' = 2p/y$. Si $P_0(x_0, y_0)$ es el punto de tangencia, se tiene $y_0^2 = 4px_0$ y $m = 2p/y_0$. Así pues, $y_0 = 2p/m$, $x_0 = \frac{1}{4}y_0^2/p = p/m^2$ y la ecuación de la tangente, $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$, o bien, $y = mx + p/m$.

(*b*) $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. En P_0, $m = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ y la ecuación de la tangente es $y - y_0 = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$

o sea $b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$.

8. Demostrar que la tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de P_0.

En el punto P_0 la pendiente de la tangente a la hipérbola es b^2x_0/a^2y_0 y las pendientes de los radios vectores P_0F' y P_0F son $y_0/(x_0 + c)$ e $y_0/(x_0 - c)$, respectivamente. Así pues,

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} - \dfrac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 + c}} = \frac{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + b^2cx_0}{(a^2 + b^2)x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{cy_0(a^2 + cx_0)} = \frac{b^2}{cy_0}$$

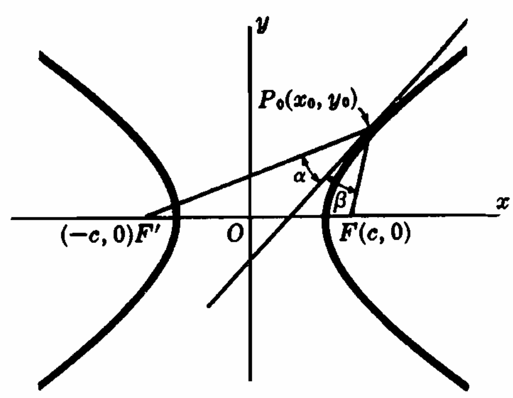

Fig. 7-3

puesto que $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ y $a^2 + b^2 = c^2$, y

$$\operatorname{tag} \beta = \frac{\dfrac{y_0}{x_0 - c} - \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)}{(a^2 + b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}$$

Luego, como $\operatorname{tag} \alpha = \operatorname{tag} \beta$, $\alpha = \beta$.

9. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ trazadas desde un punto de la directriz pasa por el foco correspondiente.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto desde el que se trazan las tangentes a la elipse y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los correspondientes puntos de contacto. Las ecuaciones de las tangentes en P_1 y P_2 son $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ y $b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$. Como ambas pasan por P_0, se verifican $b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 = a^2b^2$ y $b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 = a^2b^2$. La recta $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, que pasa por P_1 y P_2, es la cuerda de contacto. Sea $P(a^2/c, \bar{y})$ un punto de la directriz del lado derecho. La ecuación de la cuerda de contacto que pasa por P tiene de ecuación $(b^2a^2/c)x + a^2\bar{y}y = a^2b^2$ y, como se puede comprobar, pasa por el foco correspondiente $F(c, 0)$.

10. Hallar el ángulo agudo de intersección de las curvas (*1*) $y^2 = 4x$ y (*2*) $2x^2 = 12 - 5y$.

(*a*) Los puntos de intersección de las curvas son $P_1(1, 2)$ y $P_2(4, -4)$.

(*b*) En (*1*), $y' = 2/y$; en (*2*), $y' = -4x/5$.

En $P_1(1, 2)$, $m_1 = 1$ y $m_2 = -4/5$; en $P_2(4, -4)$, $m_1 = -1/2$ y $m_2 = -16/5$.

(*c*) En P_1: $\operatorname{tag} \phi = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \dfrac{1 + 4/5}{1 - 4/5} = 9$ y $\phi = 83°40'$ es el ángulo agudo de intersección.

En P_2: $\operatorname{tag} \phi = \dfrac{-1/2 + 16/5}{1 + 8/5} = 1{,}0385$ y $\phi = 46°5'$ es el ángulo agudo de intersección.

11. Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas (*1*) $2x^2 + y^2 = 20$ y (*2*) $4y^2 - x^2 = 8$.

Los puntos de intersección son $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$ y $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$.

En (*1*), $y' = -2x/y$, y en (*2*), $y' = x/4y$.

En el punto $(2\sqrt{2}, 2)$, $m_1 = -2\sqrt{2}$ y $m_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Como $m_1m_2 = -1$, el ángulo de intersección es $\phi = 90°$ (es decir, las curvas son ***ortogonales***). Por simetría se deduce que las curvas son ortogonales en cada uno de sus puntos de intersección.

12. El cable de un puente colgante está unido a dos pilares separados entre sí una distancia de 250 m. Suponiendo que adquiere forma de parábola con su punto más bajo a una distancia de 50 m del punto de suspensión, calcular el ángulo que forma el cable con el pilar.

Se elige como origen el vértice de la parábola como se representa en la Fig. 7-4.

La ecuación de la parábola es $y = \dfrac{2}{625}x^2$, y $y' = \dfrac{4x}{625}$.

En el punto (125, 50), $m = 4(125/625) = 0{,}8000$ y $\theta = 38°40'$.

El ángulo pedido es $\phi = 90° - \theta = 51°20'$.

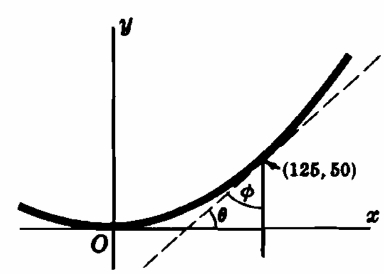

Fig. 7-4

13. Hallar la longitud de la subtangente, subnormal tagente y normal a la curva $xy + 2x - y = 5$ en el punto (2, 1).

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 + y}{1 - x}$; en el punto (2, 1), $m = -3$.

Longitud de la subtangente $= y_0/m = -1/3$. Longitud de la subnormal $= my_0 = -3$.

Longitud de la tangente $= \sqrt{1/9 + 1} = \sqrt{10}/3$. Longitud de la normal $= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

Problemas propuestos

14. Hallar en qué puntos de la curva $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ la tangente es horizontal o vertical.
Sol. T.H. en $(3, -3/2)$ y $(-3, 3/2)$
T.V. en $(6, -3/4)$ y $(-6, 3/4)$

15. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 - y^2 = 7$ en el punto $(4, -3)$.
Sol. $4x + 3y = 7$; $3x - 4y = 24$.

16. Hallar en qué punto la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ es (*a*) paralela a la recta $12x - y = 17$, (*b*) perpendicular a la recta $x + 3y = 2$. *Sol.* (*a*) $(2, 13)$, $(-2, -3)$; (*b*) $(1, 6)$, $(-1, 4)$.

17. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $9x^2 + 16y^2 = 52$ paralelas a la recta $9x - 8y = 1$.
Sol. $9x - 8y = \pm 26$.

18. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $xy = 1$ trazadas desde el punto $(-1, 1)$.
Sol. $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2$; $y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$.

19. Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto de ella $P(x_0, y_0)$ es, $yy_0 = 2p(x + x_0)$.

20. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ de pendiente igual a m son, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

21. Dada la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que (*a*) la ecuación de la tangente en un punto de ella, $P(x_0, y_0)$, es $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$, (*b*) las ecuaciones de las tangentes de pendiente m son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

22. Demostrar que la normal a una parábola en un punto de ella P_0 es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector de dicho punto y la paralela al eje de la parábola trazada por él.

23. Demostrar que toda tangente a una parábola excepto la del vértice, corta a la directriz y al *latus rectum* (N. del T.: Cuerda perpendicular al eje por el foco) en puntos que equidistan del foco.

24. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una parábola trazada desde un punto de la directriz, pasa por el foco.

25. Demostrar que la normal a una elipse en un punto de ella P_0 es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores de dicho P_0.

26. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una hipérbola trazada desde un punto de una directriz pasa por el foco correspondiente.

27. Demostrar que el punto de contacto de una tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

28. Demostrar que la pendiente de la tangente a una hipérbola o una elipse en uno de los extremos de su *latus rectum* (*N. del T.*: Cuerda perpendicular al eje—mayor en la elipse y transversal en la hipérbola— por el foco) es numéricamente igual a su excentricidad.

29. Demostrar que (*a*) la suma de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ es constante, (*b*) la suma de los cuadrados de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, es constante.

30. Hallar los ángulos agudos de intersección de las circunferencias $x^2 - 4x + y^2 = 0$ y $x^2 + y^2 = 8$. *Sol.* 45.°

31. Demostrar que las curvas $y = x^3 + 2$ e $y = 2x^2 + 2$ tienen una tangente común en el punto $(0, 2)$ y que se cortan en el punto $(2, 10)$ formando un ángulo $\phi = \text{arc tag } 4/97$.

32. Demostrar que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales.

33. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, así como las longitudes de subtangentes, subnormal, tangente y normal, a la parábola $y = 4x^2$ en el punto $(-1, 4)$.
Sol. $y + 8x + 4 = 0$, $8y - x - 33 = 0$; $-\frac{1}{2}$, -32, $\frac{1}{2}\sqrt{65}$, $4\sqrt{65}$.

34. Calcular la longitud de subtangente, subnormal, tangente y normal a la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 10$ en el punto $(-2, 1)$.
Sol. $-1/3$, -3, $\sqrt{10}/3$, $\sqrt{10}$.

35. Determinar en qué puntos de la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ sus tangentes pasan por el origen.
Sol. $x = -3, -1, 3/4$.

Capítulo 8

Máximos y mínimos

FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE. Una función $f(x)$ es *creciente* en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$. Análogamente, $f(x)$ es *decreciente* en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

Si $f'(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$ y si $f'(x_0) < 0$, es decreciente en dicho punto. (Ver Problema 17.) Cuando $f'(x_0) = 0$, diremos que la función es *estacionaria* en el punto $x = x_0$.

Una función es creciente (decreciente) en un intervalo, cuando es creciente (decreciente) o estacionaria en cada uno de los puntos del mismo.

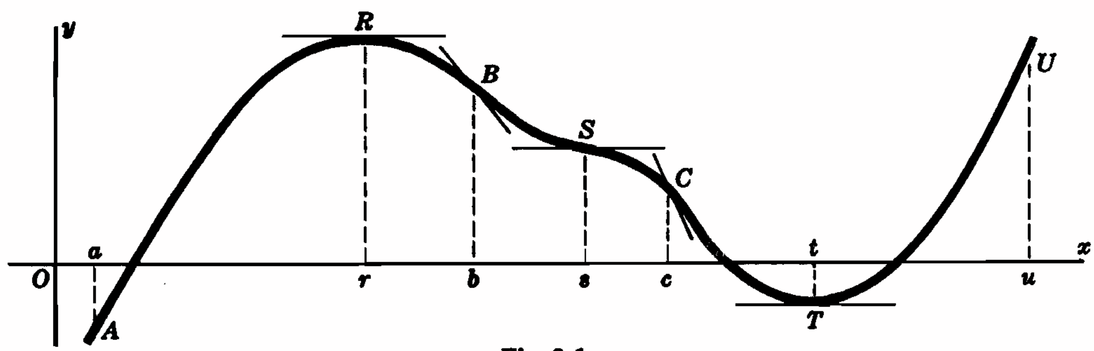

Fig. 8-1

En la Fig. 8-1, la función $y = f(x)$ es creciente en los intervalos $a < x < r$ y $t < x < u$, decreciente en el $r < x < t$ y estacionaria en los puntos $x = r$, $x = s$ y $x = t$. La curva tiene tangente horizontal en los puntos R, S y T. Los valores de x, (r, s y t) para los cuales la función $f(x)$ es estacionaria ($f'(x) = 0$), reciben el nombre de *valores críticos* y los puntos correspondientes de la curva (R, S y T) el de *puntos críticos*.

MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION. Una función $y = f(x)$ tiene un *máximo* (*mínimo*) *relativo* en un punto $x = x_0$, cuando $f(x_0)$ es mayor (menor) que los valores de la función para los puntos inmediatamente anteriores y posteriores al considerado. (Ver Problema 1.)

En la Fig. 8-1, $R[r, f(r)]$ es un máximo relativo de la curva puesto que $f(r) > f(x)$ en el entorno $0 < |x - r| < \delta$. En estas condiciones, $y = f(x)$ tiene un *máximo relativo* $[= f(r)]$ en $x = r$. En la misma figura, $T[t, f(t)]$ es un mínimo relativo de la curva puesto que $f(t) < f(x)$ en el entorno $0 < |x - t| < \delta$. Por tanto, $y = f(x)$ tiene un *mínimo relativo* $[= f(t)]$ en $x = t$. Obsérvese que R es el punto de unión de un arco AR ascendente $[f'(x) > 0]$ y otro RB descendente $[f'(x) < 0]$, mientras que T une un arco CT descendente $[f'(x) < 0]$ con otro TU ascendente $[f'(x) > 0]$. En el punto S se unen dos arcos descendentes y, por consiguiente, en él no habrá ni máximo ni mínimo relativo.

Si la función $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$. (Ver Problema 18.)

Para determinar los máximos (mínimos) relativos [o simplemente máximos (mínimos)] de una función $f(x)$ continua así como su derivada se puede seguir el siguiente proceso:

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

1. Resolver la ecuación $f'(x_0) = 0$ para calcular los valores críticos.
2. Representar estos valores críticos sobre el eje de abscisas de un sistema coordenado (escala numérica); de esta manera se han establecido un cierto número de intervalos.
3. Determinar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos anteriores.
4. Para cada uno de los valores críticos $x = x_0$:

$f(x)$ tiene un máximo $[= f(x_0)]$, si $f'(x)$ pasa de $+$ a $-$,

$f(x)$ tiene un mínimo $[= f(x_0)]$, si $f'(x)$ pasa de $-$ a $+$,

$f(x)$ no tiene ni máximo ni mínimo en el punto $x = x_0$, si $f'(x)$ no cambia de signo.

(Ver Problemas 2-5.)

UNA FUNCION $y = f(x)$ puede tener máximos o mínimos $[= f(x_0)]$ aunque no exista $f'(x_0)$. Los valores, $x = x_0$, para los cuales $f(x)$ está definida pero no existe $f'(x)$, también reciben el nombre de valores críticos y junto con aquellos otros para los cuales $f'(x) = 0$, han de servir para establecer los intervalos del apartado 2 del párrafo anterior.

(Ver Problemas 6-8.)

Finalmente, se pueden presentar otros casos —de los que aquí no trataremos— en los que $f(x_0)$ tenga máximo (mínimo) aunque no exista un intervalo, $x_0 - \delta < x < x_0$, para el cual $f'(x)$ sea positiva (negativa) ni otro, $x_0 < x < x_0 + \delta$, para el que $f'(x)$ sea negativa (positiva).

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. Un arco de curva $y = f(x)$ es cóncavo si en cada uno de sus puntos está situado por encima de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o aumenta sin cambiar de signo (como en el intervalo $b < x < s$ de la Fig. 8-1) o cambia de signo pasando de negativa a positiva (como en el intervalo $c < x < u$). En cualquier caso, la pendiente $f'(x)$ aumenta y $f''(x) > 0$.

Un arco de curva $y = f(x)$ es convexo, si en cada uno de sus puntos el arco está situado por debajo de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o disminuye sin cambiar de signo (como en el intervalo $s < x < c$) o cambia de signo pasando de positiva a negativa (como en el intervalo $a < x < b$). En cualquier caso, la pendiente $f'(x)$ disminuye y $f''(x) < 0$.

PUNTO DE INFLEXION. Es un punto en el cual la curva pasa de cóncava a convexa o viceversa. En la Fig. 8-1, los puntos B, S y C son de inflexión.

Una curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $x = x_0$

si $f''(x_0) = 0$ ó no está definida y

si $f''(x)$ cambia de signo en un entorno de $x = x_0$.

La última condición equivale a $f'''(x_0) \neq 0$ cuando existe la tercera derivada $f'''(x_0)$.

(Ver Problemas 9-13.)

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

1. Resolver la ecuación $f'(x) = 0$ para calcular los valores críticos.
2. Para cada uno de los valores críticos $x = x_0$:

   $f(x)$ tiene un máximo $[=f(x_0)]$, si $f''(x_0) < 0$,

   $f(x)$ tiene un mínimo $[=f(x_0)]$, si $f''(x_0) > 0$,

   si $f''(x_0) = 0$ ó se hace infinito, nada se puede afirmar.

En este último caso hay que recurrir al criterio de la primera derivada.

(Ver Problemas 14-16.)

Problemas resueltos

1. (*a*) $y = -x^2$ tiene un máximo relativo $(= 0)$ en $x = 0$, puesto que $y = 0$ para $x = 0$ e $y < 0$ para $x \neq 0$.

   (*b*) $y = (x - 3)^2$ tiene un mínimo relativo $(= 0)$ en $x = 3$, puesto que $y = 0$ para $x = 3$ e $y > 0$ para $x \neq 3$.

   (*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ tiene un máximo relativo $(= 5)$ en $x = 0$, puesto que $y = 5$ para $x = 0$ e $y < 5$ en el intervalo $-1 < x < 1$.

   (*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos. [Algunos autores definen los máximos y mínimos relativos, de forma que esta función tiene un máximo relativo en el punto $x = 4$. Ver Problema 30.]

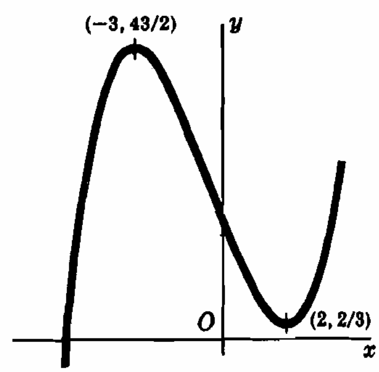

Fig. 8-2

2. Dada la función $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$, calcular:

   (*a*) Puntos críticos.

   (*b*) Intervalos en los cuales y es creciente y decreciente.

   (*c*) Máximos y mínimos de y.

   (*a*) $y' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

   Resolviendo $y' = 0$, obtenemos los valores críticos $x = -3, 2$.
   Los puntos críticos son $(-3, 43/2)$, $(2, 2/3)$.

   (*b*) Cuando y' es positiva, y es creciente; cuando y' es negativa, y es decreciente.

   Cuando $x < -3$, por ejemplo $x = -4$, $\quad y' = (-)(-) = +$, e y es creciente.
   Cuando $-3 < x < 2$, por ejemplo $x = 0$, $\quad y' = (+)(-) = -$, e y es decreciente.
   Cuando $x > 2$, por ejemplo $x = 3$, $\quad y' = (+)(+) = +$, e y es creciente.

   En el siguiente diagrama se representan estos resultados.

$x < -3$	Máx. $x = -3$	$-3 < x < 2$	Mín. $x = 2$	$x > 2$
$y' = +$ y creciente		$y' = -$ y decreciente		$y' = +$ y creciente

   (*c*) Veamos si hay máximo o mínimo en los valores críticos $x = -3, 2$.

   Al ir aumentando x al pasar por -3, y' cambia de signo, de $+$ a $-$. Por tanto en $x = -3$, y tiene un máximo, igual a $43/2$.

   Al ir aumentando x al pasar por 2, y' cambia de signo, de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = 2$, y tiene un mínimo igual a $2/3$,

3. Dada la función $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, calcular:

(*a*) Intervalos en los que y es creciente y decreciente.
(*b*) Máximos y mínimos de y.

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x + 2)(2x + 1)(x - 1)$
Resolviendo $y' = 0$ obtenemos los valores críticos $x = -2, -\frac{1}{2}, 1$.

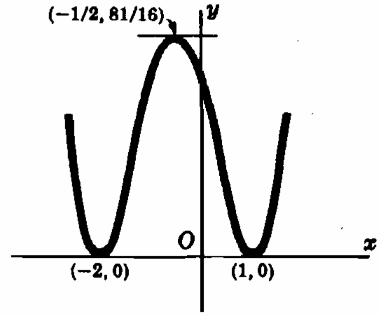

Fig. 8-3

(*a*) Cuando $x < -2$, $\quad y' = 2(-)(-)(-) = -$, e y es decreciente.
Cuando $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $\quad y' = 2(+)(-)(-) = +$, e y es creciente.
Cuando $-\frac{1}{2} < x < 1$, $\quad y' = 2(+)(+)(-) = -$, e y es decreciente.
Cuando $x > 1$, $\quad y' = 2(+)(+)(+) = +$, e y es creciente.

En el siguiente diagrama se representan estos resultados.

$x < -2$	Mín. $x = -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	Máx. $x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	Mín. $x = 1$	$x > 1$
$y' = -$ y decrece		$y' = +$ y crece		$y' = -$ y decrece		$y' = +$ y crece

(*b*) Veamos si hay máximo o mínimo en los valores críticos $x = -2, -\frac{1}{2}, 1$.

Al ir aumentando x al pasar por -2, y' cambia de signo de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = -2$, y tiene un mínimo igual a 0.

Al ir aumentando x al pasar por $-\frac{1}{2}$, y' cambia de signo, de $+$ a $-$. Por tanto, en $x = -\frac{1}{2}$, y tiene un máximo igual a 81/16.

Al ir aumentando x al pasar por 1, y' cambia de signo, de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = 1$, y tiene un mínimo igual a 0.

4. Demostrar que la función $y = x^3 - 8$ no tiene máximos ni mínimos.

$y' = 3x^2$. De la ecuación $y' = 0$, se obtiene $x = 0$.
Para $x < 0$ y $x > 0$, $y' > 0$. Por tanto, no hay máximos ni mínimos.
En $x = 0$ la curva presenta un punto de inflexión.

5. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, determinando los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x - 2)^2}$. Como $f(2)$ no está definida (e.d., $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a 2) no hay valores críticos. Sin embargo, para determinar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente se acude al punto $x = 2$.

$f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 2$. Por tanto, $f(x)$ es decreciente en los intervalos $x < 2$ y $x > 2$.

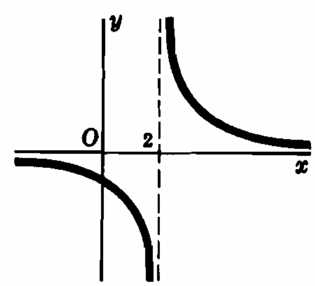

Fig. 8-4

6. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = 2 + x^{2/3}$ determinando los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.

$f'(x) = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$. El valor crítico es $x = 0$, ya que $f'(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a 0.

Para $x < 0, f'(x) < 0$, y $f(x)$ es decreciente.
Para $x > 0, f'(x) > 0$, y $f(x)$ es creciente.
Por tanto, en $x = 0$, la función tiene un mínimo igual a 2.

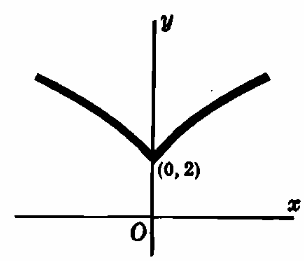

Fig. 8-5

7. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^{4/3}(1 - x)^{1/3}$.

Derivando, $y' = \dfrac{x^{1/3}(4 - 5x)}{3(1 - x)^{2/3}}$ y los valores críticos son $x = 0$, 4/5 y 1.

Para $x < 0$, $y' < 0$; en el intervalo $0 < x < 4/5$, $y' > 0$; en $4/5 < x < 1$, $y' < 0$.
Para $x > 1$, $y' < 0$. La función tiene un mínimo (igual a 0) en $x = 0$ y un máximo (igual a $\frac{4}{25}\sqrt[3]{20}$) en $x = 4/5$.

8. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = |x|$.

La función está definida para todos los valores de x y existe su derivada en todos ellos excepto en $x = 0$. (Ver Problema 11, Capítulo 4). Por tanto, $x = 0$ es un valor crítico. Para $x < 0$, $f'(x) = -1$, mientras que para $x > 0$, $f'(x) = +1$. La función tiene un mínimo ($= 0$) en $x = 0$. Dibujando la función se llegaría de forma inmediata a este resultado.

9. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$.

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$

$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x + 1)(x - 2)$$

Resolviendo $y'' = 0$ obtenemos los posibles puntos de inflexión $x = -1/3, 2$.

Cuando $x < -1/3$, $y'' = +$, y el arco es cóncavo.

Cuando $-1/3 < x < 2$, $y'' = -$, y el arco es convexo.

Cuando $x > 2$, $y'' = +$, y el arco es cóncavo.

$x < -1/3$	$x = -1/3$	$-1/3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y'' = +$ cóncavo		$y'' = -$ convexo		$y'' = +$ cóncavo

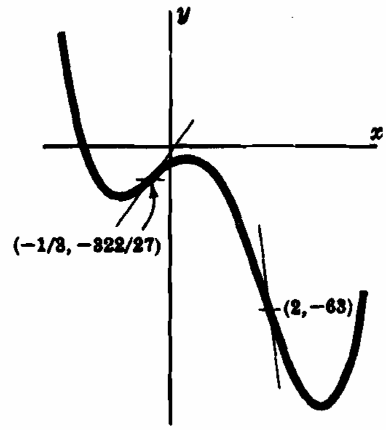

Fig. 8-6

Los puntos de inflexión son $(-1/3, -322/27)$ y $(2, -63)$, ya que y'' cambia de signo en $x = -1/3$ y $x = 2$.

10. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = x^4 - 6x + 2$. Ver Fig. 8-7.

$y'' = 12x^2$. En $x = 0$ puede presentar un punto de inflexión.

En los intervalos $x < 0$ y $x > 0$, $y'' > 0$; los arcos son cóncavos. El punto $P(0, 2)$ no es de inflexión.

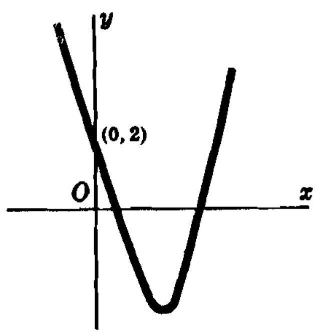

Fig. 8-7

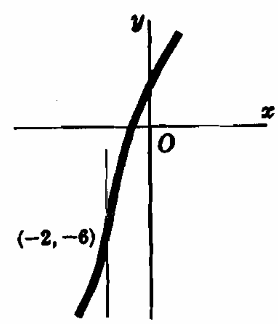

Fig. 8-8

11. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = 3x + (x + 2)^{3/5}$. Ver Fig. 8-8.

$$y' = 3 + \frac{3}{5(x + 2)^{2/5}} \qquad y'' = \frac{-6}{25(x + 2)^{7/5}}$$

En $x = -2$, puede presentar un punto de inflexión.

Para $x > -2$, $y'' < 0$; el arco es convexo.

Para $x < -2$, $y'' > 0$; el arco es cóncavo.

El punto $(-2, -6)$ es un punto de inflexión.

12. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$ en sus puntos de inflexión.

$$y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12^2 - 8x$$

Para $x = x_0$ existe un punto de inflexión si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$.

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$
$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$
$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x-3)$$

Los posibles puntos de inflexión son $x = 1, 2$. Como $f'''(1) \neq 0$ y $f'''(2) \neq 0$, los puntos $(1, -1)$ y $(2, 0)$ son de inflexión:

En el punto $(1, -1)$, la pendiente $m = f'(1) = 2$ y la ecuación de la tangente es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{o sea} \quad y + 1 = 2(x - 1) \quad \text{o} \quad y = 2x - 3$$

En el punto $(2, 0)$, la pendiente $m = f'(2) = 0$, y la ecuación de la tangente es $y = 0$.

13. Demostrar que los puntos de inflexión de $y = \dfrac{a - x}{x^2 + a^2}$ están situados sobre una recta y deducir su ecuación.

$$y' = \frac{x^2 - 2ax - a^2}{(x^2 + a^2)^2} \qquad \text{e} \qquad y'' = -2\,\frac{x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3}{(x^2 + a^2)^3}$$

Los valores de $x = -a, a(2 \pm \sqrt{3})$, son las raíces de la ecuación $x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = 0$; los puntos de inflexión son: $[-a, 1/a]$, $[a(2 + \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3})/4a]$, $[a(2 - \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})/4a]$. La pendiente de la recta que pasa por dos cualesquiera de estos puntos es $-1/4a^2$, y la ecuación de la recta que los une, $x + 4a^2y = 3a$.

14. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x(12 - 2x)^2$ aplicando el criterio de la segunda derivada.

(*a*) $f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$. Los valores críticos son $x = 2, 6$.

(*b*) $f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x - 4)$.

(*c*) $f''(2) < 0$. Por tanto $f(x)$ tiene un máximo igual a 128 para $x = 2$.
$f''(6) > 0$. Por tanto $f(x)$ tiene un mínimo igual a 0 para $x = 6$.

15. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$ aplicando el criterio de la segunda derivada.

(*a*) $y' = 2x - \dfrac{250}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 125)}{x^2}$. El valor crítico es $x = 5$.

(*b*) $y'' = 2 + \dfrac{500}{x^3}$

(*c*) $y'' > 0$ para $x = 5$. Por tanto tiene un mínimo igual a 75 para $x = 5$.

16. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = (x - 2)^{2/3}$.

(*a*) $y' = \dfrac{2}{3}(x - 2)^{-1/3} = \dfrac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$. El valor crítico es $x = 2$.

(*b*) $y'' = -\dfrac{2}{9}(x - 2)^{-4/3} = -\dfrac{2}{9(x - 2)^{4/3}}$

(*c*) Como y'' tiende a infinito cuando x tiende a 2, hay que acudir al criterio de la primera derivada. Para $x < 2$, $y' < 0$; para $x > 2$, $y' > 0$. Por tanto, y presenta un mínimo relativo, igual a 0, en el punto $x = 2$.

17. Una función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$, si, dado un $h > 0$ y suficientemente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.

Demostrar que si $f'(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$.

Como $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$, tendremos $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ para un $|\Delta x|$ suficientemente pequeño, Problema 4, Capítulo 3.

Si $\Delta x < 0$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, y haciendo $\Delta x = -h$, $f(x_0 - h) < f(x_0)$. Si $\Delta x > 0$, por ejemplo $\Delta x = h$, $f(x_0 + h) > f(x_0)$. Es decir, $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$, que es lo establecido en la definición.

Ver Problema 33 para una función decreciente.

18. Demostrar que si $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$.

Como $f(x)$ presenta un máximo relativo en $x = x_0$, para todo Δx, siendo $|\Delta x|$ suficientemente pequeño,

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \qquad \text{y} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

Ahora bien cuando $\Delta x < 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$

y cuando $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0.$

Por tanto, $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, y $f'(x_0) = 0$, como se quería demostrar. Ver Problema 34 para el mínimo relativo.

19. Demostrar el criterio de la segunda derivada para hallar máximos y mínimos: Si $f(x)$ y $f'(x)$ admiten derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, representa un valor crítico de $f(x)$, y $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

Como $f''(x_0) > 0$, $f'(x)$ es creciente en $x = x_0$ y existirá un $h > 0$ tal, que $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. Por tanto, para valores de x inferiores a x_0, $f'(x) < f'(x_0)$, y para valores de x superiores a x_0, $f'(x) > f'(x_0)$. Ahora bien, como $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < x_0$, y $f'(x) > 0$ para $x > x_0$. Estas son las condiciones (ver Problema 18) que aseguran la existencia de un mínimo relativo de la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$. Se deja para el alumno, la demostración del teorema análogo para el máximo relativo.

20. Consideremos el problema de situar sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ un punto (X, Y) cuya distancia a uno dado $P(a, 0)$, siendo $a > 0$, sea mínima. De la expresión que da la distancia entre dos puntos, se deduce $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$, y por pertenecer el punto (X, Y) a la hipérbola, $X^2 - Y^2 = 1$.

Expresando D^2 en función X solamente, resulta:

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

cuyo valor crítico de esta función es $X = \frac{1}{2}a$.

Si tomamos $a = \frac{1}{2}$, no habrá ningún punto sobre la hipérbola, porque Y se hace imaginario para el valor crítico $X = \frac{1}{4}$. Dibujando la figura correspondiente se vería claramente que el punto de la hipérbola más próximo al $P(\frac{1}{2}, 0)$ es el $V(1, 0)$. Por tanto, lo que se trata en este caso es hallar el mínimo de la función $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$ con la condición de que $X \geq 1$. (Obsérvese que esta condición no la lleva implícitamente la función $f(X)$. Esta función, sin poner condición alguna, presenta un mínimo relativo en el punto $X = \frac{1}{4}$.) En el intervalo $X \geq 1$, $f(X)$ tiene un mínimo absoluto en el extremo $X = 1$, que no es un mínimo relativo. Se deja como ejercicio para el alumno el estudio del problema cuando (i) $a = \sqrt{2}$ y (ii) $a = 3$.

Problemas propuestos

21. Determinar los intervalos en los que son crecientes y decrecientes cada una de las funciones del Problema 1.

Sol. (*a*) Crec. $x < 0$; Dec. $x > 0$. (*b*) Crec. $x > 3$, Dec. $x < 3$. (*c*) Crec. $-5/2 < x < 0$; Dec. $0 < x < 5/2$. (*d*) Crec. $x > 4$.

22. (*a*) Demostrar que $y = x^5 + 20x - 6$ es una función creciente para todos los valores de x.

(*b*) Demostrar que $y = 1 - x^3 - x^7$ es una función decreciente para todos los valores de x.

23. Hallar los máximos y mínimos, aplicando el criterio de la primera derivada, de las funciones siguientes:

(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ — *Sol.* $x = -1$ mínimo relativo $= -4$

(*b*) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= 4$

(*c*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ — *Sol.* $x = \frac{2}{3}$ mínimo relativo $= -256/27$; $x = -2$ máximo relativo $= 0$

(*d*) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= -4$; $x = 3$ máximo relativo $= -8$

(*e*) $f(x) = (2 - x)^3$ — *Sol.* No tiene ni máx. ni mín. relativos

(*f*) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ — *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 16$; $x = \pm 2$ mínimo relativo $= 0$

(*g*) $f(x) = (x - 4)^4(x + 3)^3$ *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 6\,912$
$x = 4$ mínimo relativo $= 0$
$x = -3$ ni máximo ni mínimo

(*h*) $f(x) = x^3 + 48/x$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= -32$
$x = 2$ mínimo relativo $= 32$

(*i*) $f(x) = (x - 1)^{1/3}(x + 2)^{2/3}$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= 0$
$x = 0$ mínimo relativo $= -\sqrt[3]{4}$
$x = 1$ ni máximo ni mínimo

24. Hallar los máximos y mínimos de las funciones del Problema 23 (*a*)-(*f*) aplicando el criterio de la segunda derivada. Determinar, asimismo, los puntos de inflexión y los intervalos en los que la curva es cóncava o convexa.

Sol. (*a*) No tiene P.I.; es siempre cóncava.
(*b*) No tiene P.I.; es siempre convexa.
(*c*) P.I. en $x = -2/3$; cóncava para $x > -2/3$; convexa para $x < -2/3$.
(*d*) P.I. en $x = 2$; cóncava para $x > 2$; convexa para $x < 2$.
(*e*) P.I. en $x = 2$; convexa para $x > 2$; cóncava para $x < 2$.
(*f*) P.I en $x = \pm 2\sqrt{3}/3$; cóncava para $x > 2\sqrt{3}/3$ y $x < -2\sqrt{3}/3$; convexa en $-2\sqrt{3}/3 < x < 2\sqrt{3}/3$.

25. Demostrar que la función $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, carece de máximos y mínimos relativos.

26. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3px + q$.
Sol. Mín. $= q - 2p^{3/2}$, Máx. $= q + 2p^{3/2}$ si $p > 0$; en los demás casos, ni máximo ni mínimo.

27. Demostrar que $y = (a_1 - x)^2 + (a^2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$ tiene un mínimo relativo cuando $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

28. Demostrar que si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ hay un punto de inflexión en el punto $x = x_0$.

29. Demostrar que si $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene dos puntos críticos, en el punto medio del segmento que une los correspondientes valores críticos la función presenta un punto de inflexión, y que si solo tiene un punto crítico, éste es de inflexión.

30. Una función tiene un máximo (mínimo) absoluto en un punto $x = x_0$, cuando $f(x_0)$ es mayor (menor) o igual a cualquier otro valor de la función en su dominio de definición. Comprobar, gráficamente que (*a*) $y = -x^2$ tiene un máximo absoluto en el punto $x = 0$; (*b*) $y = (x - 3)^2$ tiene un mínimo absoluto $(= 0)$ en el punto $x = 3$; (*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ tiene un máximo absoluto $(= 5)$ en $x = 0$ y un mínimo absoluto $(= 0)$ en $x = \pm 5/2$; (*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ tiene un mínimo absoluto $(= 0)$ en $x = 4$.

31. Hallar los máximos y mínimos de las funciones siguientes en los intervalos dados:

(*a*) $y = -x^2$ en $-2 < x < 2$ *Sol.* Máx. $(= 0)$ en $x = 0$

(*b*) $y = (x - 3)^2$ en $0 \le x \le 4$ *Sol.* Máx. $(= 9)$ en $x = 0$
Mín. $(= 0)$ en $x = 3$

(*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ en $-2 \le x \le 2$ *Sol.* Máx. $(= 5)$ en $x = 0$
Mín. $(= 3)$ en $x = \pm 2$

(*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ en $4 \le x \le 29$ *Sol.* Máx. $(= 5)$ en $x = 29$
Mín. $(= 0)$ en $x = 4$

Nota. Estos son los valores máximos y mínimos de los que se habla en la Propiedad II, Capítulo 3, de las funciones continuas.

32. Demostrar que una función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un punto $x = x_0$, si el ángulo de inclinación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ es agudo (obtuso).

33. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 17 para una función decreciente.

34. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 18 para el mínimo relativo.

35. Hallar los máximos y mínimos de la función $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$.
Sol. Máx. en (5,3); mín en (—1, —3).

36. La fuerza ejercida por el campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por una bobina de radio r sobre un pequeño imán situado a una distancia x del centro de dicha bobina viene dado por $F = \dfrac{kx}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$. Demostrar que F es máximo en $x = \frac{1}{2}r$.

37. El trabajo realizado por una pila de fuerza electromotriz constante E y resistencia interna r conectada a una resistencia de carga R, es proporcional a $E^2R/(r + R)^2$. Demostrar que dicho trabajo es máximo para $R = r$.

Capítulo 9

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS. Normalmente, en los problemas de aplicación no será necesario demostrar la existencia de un máximo o de un mínimo relativo. De un estudio previo se puede obtener la elección adecuada del valor crítico.

A veces, un máximo o un mínimo relativo de una función son un máximo o un mínimo *absolutos*. En estos casos están justificados los términos *máximo*, mayor que, menor que, etc., que figuran en los enunciados de los problemas.

Problemas resueltos

1. Hallar dos números cuya suma sea 120 y de forma que el producto P de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Sean x y $120 - x$ dichos números. Por consiguiente, $P = (120 - x)x^2$. $dP/dx = 3x(80 - x)$. Los valores críticos son $x = 0$ y $x = 80$.

Prescindiendo de la solución trivial $x = 0$, los números pedidos son $x = 80$ y $120 - x = 40$.

2. El área de una superficie rectangular es de 18 m². Sabiendo que en su interior hay otra de forma que los márgenes superior e inferior son de 3/4 m y que los márgenes laterales son de 1/2 m, hallar las dimensiones de la superficie exterior para que el área comprendida entre los márgenes sea máxima.

Sean x = longitud $18/x$ = anchura de la superficie, en metros. (Ver figura 9-1.)

El área entre márgenes es $A = (x - 1)\left(\dfrac{18}{x} = \dfrac{3}{2}\right)$.

$\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{18}{x^2} - \dfrac{3}{2}$. De la ecuación $\dfrac{dA}{dx} = 0$, se obtiene el valor crítico $x = 2\sqrt{3}$.

Las dimensiones de la superficie exterior son $x = 2\sqrt{3}$ y $18/x = 3\sqrt{3}$ m.

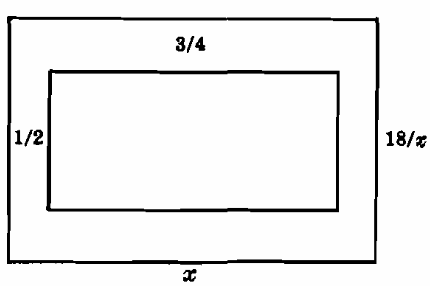

Fig. 9-1

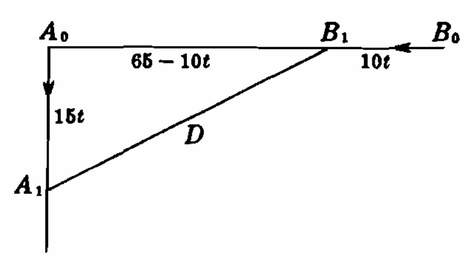

Fig. 9-2

3. En un instante determinado, un barco B se encuentra a 65 millas al este de otro barco A. El barco B empieza a navegar hacia el oeste con una velocidad de 10 millas hora, mientras que el A lo hace hacia el Sur con una velocidad de 15 millas/h. Sabiendo que las rutas iniciadas no se modifican, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima y hallar dicha distancia.

Sean A_0 y B_0 las posiciones de los barcos A y B en el instante inicial, y A_1 y B_1 sus respectivas posiciones t horas más tarde. La distancia recorrida por A en t horas es 15 t millas y la recorrida por B, 10 t millas.

La distancia D entre los barcos viene dada por $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$.

$\dfrac{dD}{dt} = \dfrac{325t - 650}{D}$. De la ecuación $\dfrac{dD}{dt} = 0$, se obtiene el valor crítico $t = 2$ para el cual la distancia es mínima.

Para $t = 2$, la función $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$ toma el valor $D = 15\sqrt{13}$ millas.

La distancia mínima entre los dos barcos es de $15\sqrt{13}$ millas y se produce 2 horas después de iniciarse el movimiento.

4. Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y de 64 centímetros cúbicos de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal (área total) sea mínima, en el caso en que (*a*) el recipiente sea abierto y (*b*) sea cerrado.

Sean r y h el radio de la base y la altura en centímetros, A la cantidad de metal y V el volumen del recipiente.

(*a*) $V = \pi r^2 h = 64$ y $A = 2\pi rh + \pi r^2$.

Para expresar A en función de una sola variable se despeja h de la primera relación y se sustituye en la segunda; resulta $A = 2\pi r(64/\pi r^2) + \pi r^2 = 128/r + \pi r^2$.

$\dfrac{dA}{dr} = -\dfrac{128}{r^2} + 2\pi r = \dfrac{2(\pi r^3 - 64)}{r^2}$, y el valor crítico es $r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Por tanto, $h = 64/\pi r^2 = 4/\sqrt[3]{\pi}$, y $r = h = 4\sqrt[3]{\pi}$ cm.

(*b*) $V = \pi r^2 h = 64$, y $A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(64/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 128/r + 2\pi r^2$.

$\dfrac{dA}{dr} = -\dfrac{128}{r^2} + 4\pi r = \dfrac{4(\pi r^3 - 32)}{r^2}$, y el valor crítico es $r = 2\sqrt[3]{4/\pi}$

Por tanto, $h = 64/\pi r^2 = 4\sqrt[3]{4/\pi}$, y $h = 2r = 4\sqrt[3]{4/\pi}$ cm.

5. El coste total de producción de x unidades diarias de un producto es de $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ pesetas, y el precio de venta de una de ellas es de $(50 - \frac{1}{2}x)$ pesetas.

(*a*) Hallar el número de unidades que se deben vender diariamente para que el beneficio sea máximo.

(*b*) Demostrar que el coste de producción de una unidad tiene un mínimo relativo.

(*a*) El beneficio de la venta de x unidades diarias es $P = x(50 - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$.

$\dfrac{dP}{dx} = 15 - \dfrac{3x}{2}$. Resolviendo $dP/dx = 0$ obtenemos el valor crítico $x = 10$.

Por tanto, la producción que proporciona el mayor beneficio es de 10 unidades al día.

(*b*) El coste de producción de una unidad es $C = \dfrac{(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)}{x} = \left(\dfrac{1}{4}x + 35 + \dfrac{25}{x}\right)$ pts.

$\dfrac{dC}{dx} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{x^2}$. Resolviendo $dC/dx = 0$ resulta $x = 10$, un mínimo.

6. El coste del combustible que consume una locomotora es proporcional al cuadrado de la velocidad y vale 1 600 pesetas por hora cuando la velocidad es de 40 kilómetros por hora. Independientemente de la velocidad, el coste por hora se incrementa, por otras causas, en 3 600 pesetas por hora. Calcular la velocidad a la que debe ir la locomotora para que el coste por kilómetro sea mínimo.

Sea v = velocidad buscada y C = coste total por kilómetro.

Coste de combustible por hora $= kv^2$, siendo k una constante que podemos determinar sabiendo que para $v = 40$, $kv^2 = 1\,600\; v^2 = 1\,600$, de donde resulta $k = 1$.

$$C\,(\text{pts/km}) = \frac{\text{coste (pts/h)}}{\text{velocidad (km/h)}} = \frac{v^2 + 3\,600}{v} = v + \frac{3\,600}{v}$$

$\dfrac{dc}{dv} = 1 - \dfrac{3\,600}{v^2} = \dfrac{(v - 60)(v + 60)}{v^2}$. Como $v > 0$, la única solución posible para el valor crítico es $v = 60$.

Así pues, la velocidad más económica es la de 60 kilómetros por hora.

7. Un hombre, sobre un bote de remos, está situado en un punto P a una distancia de 5 kilómetros de un punto A de la costa (rectilínea) y desea llegar a un punto B de la costa a 6 kilómetros de A en el menor tiempo posible. Determinar el camino que debe seguir sabiendo que puede remar a una velocidad de 2 kilómetros por hora y andar a una velocidad de 4 kilómetros por hora.

Sea C el punto situado entre A y B al que se dirige el hombre, y llamemos x a la distancia AC

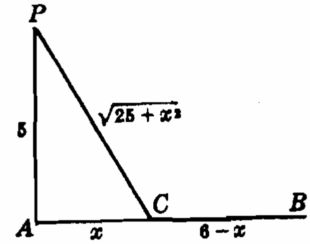

Fig. 9-3

El espacio que ha de recorrer en bote es $PC = \sqrt{25 + x^2}$ y el tiempo empleado, $t_1 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{2}$.

El espacio que ha de recorrer andando por la costa es $CB = 6 - x$ y el tiempo empleado, $t_2 = (6 - x)\frac{1}{4}$.

El tiempo total es $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{25 + x^2} + \frac{1}{4}(6 - x)$.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{2\sqrt{25 + x^2}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2x - \sqrt{25 + x^2}}{4\sqrt{25 + x^2}}$ y el valor crítico, obtenido de la ecuación $2x - \sqrt{25 + x^2} = 0$, es $x = \frac{5}{3}\sqrt{3} = 2{,}89$. Por tanto, deberá dirigirse a un punto situado entre A y B, a 2,89 kilómetros de A.

8. Se quiere poner una alambrada para proteger el contorno de un campo rectangular de área dada y uno de cuyos bordes lo constituye el cauce de un río. Sabiendo que en este borde no hay que colocar alambrada, demostrar que la menor cantidad de alambrada que se necesita es cuando la longitud del campo es igual al doble de su anchura.

Sea x = longitud e y = anchura del campo. Area = xy. Alambrada necesaria, $F = x + 2y$.

$dF/dx = 1 + 2\,dy/dx$. Para que $dF/dx = 0$ deberá ser $dy/dx = -\frac{1}{2}$.

$dA/dx = 0 = y + x\,dy/dx$. Por tanto, $y - \frac{1}{2}x = 0$, esto es $x = 2y$ como se quería demostrar.

9. Hallar las dimensiones del cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 cm de diámetro.

Sea x = radio de la base del cono e $y + 8$ = altura del cono.

De los triángulos rectángulos semejantes ABC y AED, deducimos

$\dfrac{x}{8} = \dfrac{y + 8}{\sqrt{y^2 - 64}}$. De donde $x^2 = \dfrac{64(y + 8)^2}{y^2 - 64} = \dfrac{64(y + 8)}{y - 8}$.

Volumen del cono, $V = \dfrac{(\pi x^2)(y + 8)}{3} = \dfrac{64\pi(y + 8)^2}{3(y - 8)}$.

$\dfrac{dV}{dy} = \dfrac{64\pi(y + 8)(y - 24)}{3(y - 8)^2}$. El valor crítico es $y = 24$.

Altura del cono $= y + 8 = 32$ cm; radio de la base $= x = 8\sqrt{2}$ cm.

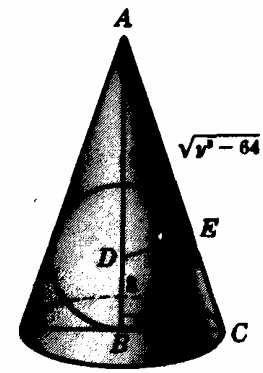

Fig. 9-4

10. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la porción de parábola $y^2 = 4px$ limitada por la recta $x = a$.

Sea $PBB'P'$ el rectángulo y (x,y) las coordenadas de P. (Ver Fig. 9-5).

Area del rectángulo, $A = 2y(a - x) = 2y(a - y^2/4p) = 2ay - y^3/2p$.

$dA/dy = 2a - 3y^2/2p$. Resolviendo $dA/dy = 0$, el valor crítico es $y = \sqrt{4ap/3}$.

Las dimensiones del rectángulo son $2y = \frac{4}{3}\sqrt{3ap}$ y $a - x = a - y^2/4p = 2a/3$.

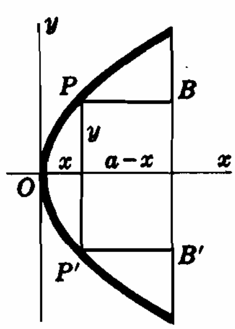

Fig. 9-5

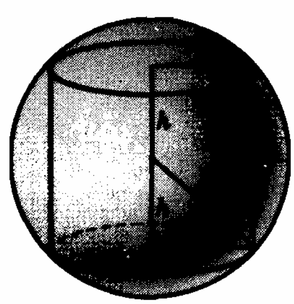

Fig. 9-6

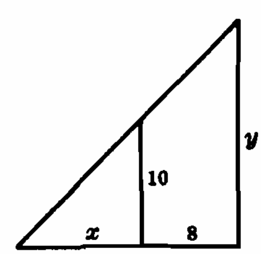

Fig. 9-7

11. Hallar la altura del cilindro circular recto de volumen máximo V que se puede inscribir en una esfera de radio R (Ver Fig. 9-6.)

Sea r el radio de la base y $2h$ la altura del cilindro.

$V = 2\pi r^2 h$ y $r^2 + h^2 = R^2$. Por tanto, $dV/dr = 2\pi(r^2\,dh/dr + 2rh)$ y $2r + 2h\,dh/dr = 0$.

De la última relación, $dh/dr = -r/h$. Por tanto, $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh)$.

Cuando V es máximo, $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2\pi h) = 0$ y $r^2 = 2h^2$.

Como $r^2 + h^2 = R^2$, $2h^2 + h^2 = R^2$ y $h = R/\sqrt{3}$. Altura del cilindro $= 2h = 2R/\sqrt{3}$.

12. Se quiere apuntalar la pared de un edificio por medio de una viga apoyada sobre una pared paralela, de 10 m de altura, situada a una distancia de 8 m de la primera. Hallar la longitud L de la viga más corta que se puede emplear al efecto.

Sea x la distancia del pie de la viga al de la pared paralela, e y la distancia metros del suelo al extremo superior, de la viga. (Ver Fig. 9-7.)

$L = \sqrt{(x+8)^2 + y^2}$. De los triángulos semejantes, $\dfrac{y}{10} = \dfrac{x+8}{x}$ e $y = \dfrac{10(x+8)}{x}$.

Por tanto $L = \sqrt{(x+8)^2 + \dfrac{100(x+8)^2}{x^2}} = \dfrac{x+8}{x}\sqrt{x^2+100}$ y

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x[(x^2+100)^{1/2} + x(x+8)(x^2+100)^{-1/2}] - (x+8)(x^2+100)^{1/2}}{x^2} = \frac{x^3 - 800}{x^2\sqrt{x^2+100}}$$

El valor crítico es $x = 2\sqrt[3]{100}$. La longitud de la viga más corta es

$$\frac{2\sqrt[3]{100} + 8}{2\sqrt[3]{100}}\sqrt{4\sqrt[3]{10\,000} + 100} = (\sqrt[3]{100} + 4)^{3/2} \text{ m}$$

Problemas propuestos

13. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y (*a*) su producto sea máximo, (*b*) la suma de sus cuadrados sea mínima, (*c*) el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo. *Sol.* (*a*) 10,10; (*b*) 10,10; (*c*) 8,12.

14. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 16 y (*a*) su suma sea mínima. (*b*) la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima. *Sol.* (*a*) 4,4; (*b*) 8,2.

15. Hallar las dimensiones de una caja rectangular abierta de 6 400 centímetros cúbicos para que resulte la más económica, teniendo en cuenta que el precio de coste de la base es de 75 pesetas y el de las superficies laterales de 25 pesetas por centímetro cuadrado.
Sol. $20 \times 22 \times 16$ cm.

16. Una pared de 3,2 metros de altura está situada a una distancia de 1,35 metros de una casa. Hallar la longitud de la escalera más corta de manera que, apoyándose en el suelo y en la pared, llegue a la cima de la casa. *Sol.* 6,25 metros.

17. Una entidad bancaria tiene las siguientes tarifas: 30 pesetas por cada mil para operaciones de hasta 50 000 pesetas; para la cantidad que sobrepase esta cifra, disminuye la tasa anterior en 0,375 pesetas por cada mil. Hallar la operación óptima de manera que el beneficio del banco sea máximo. *Sol.* 90 000 pesetas.

18. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por el punto (3, 4), determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados, un triángulo de área mínima. *Sol.* $4x + 3y - 24 = 0$.

19. Hallar un punto de la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la tangente determine en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. *Sol.* $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$.

20. Hallar la mínima distancia del punto (4, 2) a la parábola $y^2 = 8x$. *Sol.* $2\sqrt{2}$ unidades.

21. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento de ella interceptado por los ejes coordenados sea mínimo. Demostrar que la longitud de este segmento es de 9 unidades.

22. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hallar las dimensiones de dicho rectángulo para que (*a*) el área sea máxima, (*b*) el perímetro sea máximo. *Sol.* (*a*) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$, (*b*) 32×18.

23. Hallar el radio R del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r.
Sol. $R = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$.

24. En un cono circular recto r, se inscribe un cilindro circular recto. Hallar el radio R del cilindro para que (*a*) su volumen sea máximo (*b*) su área lateral sea máxima. *Sol.* (*a*) $R = \frac{2}{3}r$, (*b*) $R = \frac{1}{2}r$.

25. Demostrar que la menor cantidad de lona empleada en confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado ocurre cuando su altura sea dos veces el radio de la base.

26. Demostrar que todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de lado $3r$.

27. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima que se puede inscribir en una esfera de 8 centímetros de radio. *Sol.* $h = 2r = 8\sqrt{2}$ centímetros.

28. Estudiar la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima en un cono circular recto de radio r y altura h. *Sol.* Si $h > 2r$, radio del cilindro $= \frac{1}{2}hr/(h - r)$.

Capítulo 10

Movimientos rectilíneo y circular

MOVIMIENTO RECTILINEO

El movimiento de una partícula P a lo largo de una línea recta queda completamente definido por la ecuación $s = f(t)$, ley del movimiento, siendo $t \geqq 0$ el tiempo y s la distancia de P a un punto fijo O de la trayectoria.

La velocidad de P, en un instante t, es: $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Si $v > 0$, P se mueve en la dirección creciente de s.
Si $v < 0$, P se mueve en la dirección decreciente de s.
Si $v = 0$, P está en reposo en dicho instante.

La aceleración de P, en un instante t, es: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Si $a > 0$, v aumenta; si $a < 0$, v disminuye.
Si v y a tienen el mismo signo, la celeridad (módulo de la velocidad) de P aumenta.
Si v y a tienen signo contrario, la celeridad de P disminuye.

(Ver Problemas 1-5.)

MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento de una partícula P a lo largo de una circunferencia queda completamente definido por la ecuación $\theta = f(t)$, ley de movimiento, siendo θ el ángulo en el centro (radianes) barrido en el tiempo t por la recta que une P con el centro de la circunferencia.

La velocida angular de P en el instante t es $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

La aceleración angular de P, en el instante t es $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

Si α es constante para todos los valores de t, P se mueve con una aceleración angular constante.
Si $\alpha = 0$ para todos los valores de t, P se mueve con una velocidad angular constante.

(Ver Problema 6.)

Problemas resueltos

En los problemas que siguen sobre el movimiento rectilíneo el espacio s se mide en metros y el tiempo t en segundos.

1. La ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$. Hallar su velocidad y aceleración al cabo de 2 segundos.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2 \qquad \text{Para } t = 2, \quad v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4 \text{ m/s.}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t \qquad \text{Para } t = 2, \quad a = 3(2) = 6 \text{ m/s.}$$

2. El espacio recorrido por un móvil en línea recta viene dado por la ecuación $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ (ley del movimiento).

(*a*) Hallar s y a cuando $v = 0$.
(*b*) Hallar s y v cuando $a = 0$.
(*c*) ¿Cuándo aumenta s?
(*d*) ¿Cuándo aumenta v?
(*e*) ¿Cuándo cambia el sentido del movimiento?

$$v = ds/dt = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \qquad a = dv/dt = 6(t-2)$$

(*a*) Para $v = 0$, $t = 1$ y 3. Para $t = 1$, $s = 8$ y $a = -6$. Para $t = 3$, $s = 4$ y $a = 6$.

(*b*) Para $a = 0$, $t = 2$. Para $t = 2$, $s = 6$ y $v = -3$.

(*c*) s aumenta cuando $v > 0$, e.d, cuando $t < 1$ y $t > 3$.

(*d*) v aumenta cuando $a > 0$, e.d., cuando $t > 2$.

(*e*) El sentido del movimiento cambia cuando $v = 0$ y $a \neq 0$. De (*a*) se deduce que el sentido cambia cuando $t = 1$ y $t = 3$.

3. La ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$. Determinar cuando aumenta y disminuye:

(*a*) El espacio s.

(*b*) La velocidad v.

(*c*) La celeridad del cuerpo.

(*d*) La distancia total recorrida en los primeros 5 segundos del movimiento.

$$v = ds/dt = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4) \qquad a = dv/dt = 6(t-3)$$

(*a*) s aumenta cuando $v > 0$, esto es, cuando $t < 2$ y $t > 4$.
s disminuye cuando $v < 0$, esto es, cuando $2 < t < 4$.

(*b*) v aumenta cuando $a > 0$, esto es, cuando $t > 3$.
v disminuye cuando $a < 0$, esto es, cuando $t < 3$.

(*c*) La celeridad aumenta cuando v y a tienen el mismo signo y disminuye cuando v y a son de signos contrarios. Como v cambia de signo en $t = 2$ y $t = 4$ y a lo hace en $t = 3$, hemos de comparar los signos en los intervalos $t < 2$, $2 < t < 3$, $3 < t < 4$ y $t > 4$.

En el intervalo $t < 2$, $v > 0$ y $a < 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $2 < t < 3$, $v < 0$ y $a < 0$; la celeridad aumenta.
En el intervalo $3 < t < 4$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $t > 4$, $v > 0$ y $a > 0$; la celeridad aumenta.

(*d*) Para $t = 0$, $s = 0$, y el cuerpo se encuentra en el origen O. Al principio, el cuerpo se mueve hacia la derecha ($v > 0$), durante los dos primeros segundos, alcanzando una distancia del origen O de $s = f(2) = 20$ metros.

Durante los dos segundos siguientes se mueve hacia la izquierda, y al final de este tiempo, se encuentra en $s = f(4) = 16$ metros de O.

A continuación, se mueve hacia la derecha y, después de transcurridos 5 segundos desde que se inició el movimiento, $s = f(5) = 20$ metros de O.

El espacio total recorrido es $20 + 4 + 4 = 28$ metros.

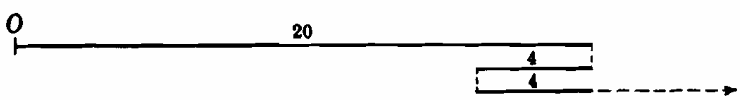

Fig. 10-1

4. Una partícula se mueve a lo largo de una línea horizontal de acuerdo con la ley $s = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ Determinar:

(*a*) Cuándo aumenta la velocidad y cuándo disminuye.

(*b*) En qué instante cambia el sentido del movimiento.

(*c*) El espacio total recorrido en los 3 primeros segundos del movimiento.

$$v = ds/dt = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10 = 2(t-1)^2(2t-5) \qquad a = dv/dt = 12(t-1)(t-2)$$

(*a*) v cambia de signo cuando $t = 1$ y $t = 2{,}5$; a cambia de signo cuando $t = 1$ y $t = 2$.

En el intervalo $t < 1$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $1 < t < 2$, $v < 0$ y $a < 0$; la celeridad aumenta.
En el intervalo $2 < t < 2{,}5$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.
En el intervalo $t > 2{,}5$ $v > 0$ y $a > 0$; la celeridad aumenta.

(*b*) El sentido del movimiento cambia en el instante $t = 2{,}5$ en el que $v = 0$, $a \neq 0$; pero no se invierte en $t = 1$, puesto que v no cambia de signo al ir aumentando t al pasar por $t = 1$. Obsérvese que para $t = 1$, $v = 0$ y $a = 0$ y, por tanto, no se posee información alguna.

(*c*) Para $t = 0$, $s = 3$, y la partícula se encuentra 3 metros a la derecha del origen O.

El movimiento se efectúa hacia la izquierda durante los 2,5 primeros segundos, al final de los cuales la partícula se encuentra a 27/16 metros a la izquierda de O.
Para $t = 3$, $s = 0$; la partícula se ha desplazado 27/16 metros hacia la derecha.
El espacio total recorrido es $3 + 27/16 = 51/8$ metros.

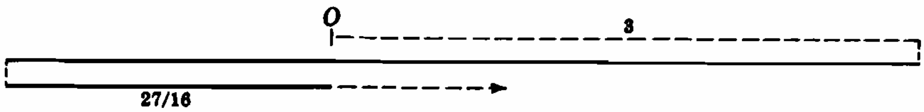

Fig. 10-2

5. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 112 metros por segundo. Sabiendo que la ley del movimiento es $s = 112t - 16t^2$, siendo s la distancia al punto de partida, calcular (*a*) la velocidad y la aceleración en los instantes $t = 3$ y $t = 4$, (*b*) la máxima altura alcanzada y (*c*) el tiempo que tardará en llegar a una altura de 96 metros.

$$v = ds/dt = 112 - 32t \qquad a = dv/dt = -32$$

(*a*) Para $t = 3$, $v = 16$ y $a = -32$. La piedra está subiendo a 16 m/seg.
Para $t = 4$, $v = -16$ y $a = -32$. La piedra está bajando a 16 m/seg.
(*b*) En el punto más alto, $v = 0$.
Resolviendo $v = 0 = 112 - 32t$, $t = 3{,}5$. Para este tiempo, $s = 196$ m.
(*c*) $96 = 112t - 16t^2$, $t^2 - 7t + 6 = 0$, $(t - 1)(t - 6) = 0$, $t = 1{,}6$.

Al cabo de 1 seg de iniciarse el movimiento, la piedra está a una altura de 96 metros y además está subiendo, puesto que $v > 0$. Al cabo de 6 seg también se encuentra a esa altura, pero en este caso está bajando, ya que $v < 0$.

6. Una partícula posee un movimiento de rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj, partiendo del reposo, según la ley $\theta = t^3/50 - t$, en donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Calcular el desplazamiento angular θ, la velocidad angular ω, y la aceleración angular al cabo de 10 segundos.

$$\theta = t^3/50 - t = 10 \text{ rad}, \quad \omega = d\theta/dt = 3t^2/50 - 1 = 5 \text{ rad/seg}, \quad \alpha = d\omega/dt = 6t/50 = 6/5 \text{ rad/seg}^2$$

Problemas propuestos

7. La ley del movimiento rectilíneo de una partícula viene dada por $s = t^3 - 6t^2 + 9t$, en donde las unidades son el metro y el segundo. Hallar la situación de la partícula con respecto a su posición inicial ($t = 0$) en O, determinar el sentido y la velocidad del movimiento y averiguar si la velocidad está aumentando o disminuyendo en los instantes (*a*) $t = 1/2$, (*b*) $t = 3/2$, (*c*) $t = 5/2$, (*d*) $t = 4$.
Sol. (*a*) 25/8 metros a la derecha de O; se mueve hacia la derecha con una $v = 15/4$ metros por segundo; disminuyendo.
(*b*) 27/ metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = 9/4$ metros por segundo; aumentando.
(*c*) 5/8 metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = -9{,}4$ metros por segundo; disminuyendo.
(*d*) 4 metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = 9$ metros por segundo; aumentando.

8. El espacio recorrido por una locomotora sobre una vía horizontal, con respecto a un punto fijo, viene dado, en función del tiempo t, por $s = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. Calcular el intervalo de tiempo en el que la locomotora marcha en sentido contrario al inicial. *Sol.* $3 < t < 8$.

9. Estudiar, tal como se hizo en el Problema 2, los movimientos rectilíneos siguientes:
(*a*) $s = t^3 - 9t^2 + 24t$, (*b*) $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$, (*c*) $s = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$, (*d*) $s = 3t^4 - 28t^3 + 90t^2 - 108t$.
Sol. (*a*) Se detiene en $t = 2$ y en $t = 4$ con cambio de sentido.
(*b*) Se detiene en $t = 1$ y no hay cambio de sentido.
(*c*) Se detiene en $t = 1$ y en $t = 3$ con cambio de sentido.
(*d*) Se detiene en $t = 1$ con cambio de sentido y en $t = 3$ sin cambio de sentido.

10. La ley del movimiento rectilíneo ascendente de un cuerpo es $s = 64t - 16t^2$. Demostrar que a los 48 metros de altura, su velocidad es igual a la mitad de la inicial.

11. Desde un tejado de 112 metros de altura, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota que, finalmente, regresa al suelo. Sabiendo que el espacio s metros recorrido desde el tejado en función del tiempo t viene dado por $s = 96t - 16t^2$, calcular (*a*) la posición de la pelota, su velocidad y el sentido del movimiento en el instante $t = 2$ y (*b*) su velocidad al llegar al suelo.
Sol. (*a*) 240 metros desde el suelo, 32 metros por segundo, hacia arriba. (*b*) $= -128$ metros por segundo.

12. El ángulo θ (radianes) girado por una rueda en función del tiempo t(seg) viene dado por $\theta = 128t - 12t^2$. Calcular la velocidad angular y la aceleración al cabo de 3 segundos. *Sol.* $\omega = 56$ radianes por segundo, $\alpha = -24$ radianes por segundo al cuadrado.

13. Demostrar, en los Problemas 2 y 9, que cuando el móvil se detiene con cambio de sentido del movimiento, el valor de t en el que ocurre es el que hace a la función $s = f(t)$ máxima o mínima, mientras que si la detención es sin cambio de sentido, se verifica en un punto de inflexión.