Teoría de Morse, CIMAT, ago-dic 2012.

Tarea núm. 2

(para el lunes 27 ago.)

1. *a*) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ suave. Sea $p \in U$ y H la matriz Hessiana de f en p (la entrada ij de H es $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$). Sea $\Phi : V \to U$ un cambio de coordenadas (V es otro abierto en $\mathbb{R}^n$ y Φ es un difeomorfismo – biyección suave con inversa suave). Sea $q = \Phi^{-1}(p)$.

   Usa la regla de la cadena para expresar la matriz Hessiana de $f \circ \Phi$ en q en términos de la matriz Hessiana de f en p, la gradiente de f en p y la matriz Jacobiana de Φ en q.

   Nota: la matriz Jacobiana de Φ en q es la matriz cuya entrada ij es $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(q)$.

   b) Concluye que si p es un punto crítico de f, las matrices Hessianas de f en p y $f \circ \Phi$ en q son matrices *congruentes*.

   Nota: dos matrices $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ son congruentes si existe una matriz invertible $P \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A = PBP^t$.

   c) Para una función suave $f : M \to \mathbb{R}$ en una variedad diferencial M de dimensión n, hemos definido en clase *un punto crítico no degenerado de f* como un punto $p \in M$ tal que en unas coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ alrededador de p, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$ y la matriz Hessiana $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right]$ es no singular (su det $\neq 0$).

   Usa el inciso anterior para demostrar que esta definición no depende de las coordenadas usadas.

2. *a*) Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $M = F^{-1}(0)$ no contiene puntos críticos, así que $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad diferencial de dimensión n. Sea $\tilde{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una función suave y $f : M \to \mathbb{R}$ su restricción a M, $f = \tilde{f}|_M$. Sea $p \in M$. Encuentra un criterio en términos de las derivadas parciales de $\tilde{f}$ y F en p para que p sea un punto crítico no degenerado de f.

   Nota: en la clase vimos el criterio de Lagrange para que p sea un punto crítico de f; es la condición $d\tilde{f}(p) = \lambda dF(p)$ para algun $\lambda \in \mathbb{R}$. Falta encontrar un criterio para que este punto sea no degenerado.

   Sugerencia: en un punto crítico de f, la Hessiana de f, pensada como forma cuadrática en T_pM, es la restricción de la Hessaiana de $\tilde{f}$ a T_pM.

****¡OJO! [agregado el 23 ago]: me equivoqué! perdon! esta "sugerencia" es incorrecta... puedes encontrar un contraejemplo? (sugerencia... $M = \{y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(x,y) = y$).

Entonces... temo que el criterio es más complicado de lo que pensaba. Aquí está: denotamos por h, $\tilde{h}$ y H las Hessianas de f, $\tilde{f}$ y F (resp.) en p. Luego tomamos un vector N transversal a M en p (por ejemplo, el gradiente de F en p). Luego denotamos por $D_N\tilde{f}$, D_NF las derivadas direcionales de $\tilde{f}, F$ (resp.) en p en la dirección de N. Entonces $h = (\tilde{h} - cH)|_{T_pM}$, donde $c = D_N\tilde{f}/D_NF$.

Aquí está lo mismo en coordenadas (más explicito): ponemos coordenadas lineales $x_1, \ldots, x_{n+1}$ arededor de p tal que p está dado por $x = 0$ y T_pM está dado por $x_{n+1} = 0$. Entonces M está dado alrededor de p como la gráfica de una función $x_{n+1} = g(x_1, \ldots, x_n)$ y podemos usar a $x_1, \ldots, x_n$ como coordenadas en M alrededor de p. Denotamos derivadas parciales por $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ etc. Tenemos entonces que en p,

$$f_{x_ix_j} = \tilde{f}_{x_ix_j} - \frac{\tilde{f}_{x_{n+1}}}{F_{x_{n+1}}} F_{x_ix_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

b) Sean $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n+1}$, $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^2$ y $S^n = \{x | \sum_i x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Aplica el criterio del inciso anterior para determinar los puntos críticos de $\tilde{f}$ restringida a S^n y determina si son degenerados.

¿Puedes hacer este ejercicio sin usar el criterio del inciso anterior? O sea, directamente por la definición, usando coordenadas locales en S^n?