Teoria de Morse, ago-dic 2012.

Tarea num. 3
(Para el lunes, 10 sept)

Definiciones

1. **Topología cociente**. Sea X un espacio topológico con una relación de equivalencia $\sim$. Sea $X/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia y $p : X \to X/\sim$ la proyección natural: $p(x) = [x]$ = la clase de equivalencia de x. La topología cociente en $X/\sim$ se define por: $U \subset X/\sim$ es abierto si y solo si $p^{-1}(U)$ es abierto.

   Si $A \subset X$ el espacio X/A es el cociente de X módulo la relación de equivalencia en donde la única clase no trivial es A.
2. **Unión disjunta.** Sean X_1, X_2 espacios topológicos. La unión disjunta $X_1 \amalg X_2$ se define como el conjunto $X_1 \times \{1\} \cup X_2 \times \{2\}$, con la topología siguiente: sean $\phi_i : X_i \to X_1 \amalg X_2$, $i = 1, 2$, las inyecciones naturales, $\phi_i(x) = (x, i)$. Entonces $U \subset X_1 \amalg X_2$ es abierto ssi $\phi_i^{-1}(U)$ es abierto para $i = 1, 2$.
3. **Pegado de espacios** ("attaching" o "gluing"). Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función contínua. Se define a $X \cup_f Y$ como $X \amalg Y/\sim$, donde la relación de equivalencia está generada por $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$.

   Nota: la relación de equivalencia "generada"por una relación $R \subset X \times X$ es la mínima relación de equivalencia que contiene a R (la intersección de todas las relaciones de equaivalencia que contienen a R).
4. **Celdas.** La n-celda cerrada es $\bar{e}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$, la n-celda abierta es $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < 1\}$, la n esfera es $\partial e^{n+1} = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$. (Nota que $\partial e^1 = \{-1, +1\}$ y $\bar{e}^0 = e^0 = \{0\}$.)

Problemas

1. Demuestra que las definiciones de topología cociente y unión disjunta satisfacen los axiomas de toplogía.
2. Sea $f : \partial\bar{e}^n \to e^0$ la función constante. Demuestra que $\bar{e}^n \cup_f e_0$ es homeomorfo a $S^n = \partial e^{n+1}$ (la n-esfera.) Otra notación: $S^n \approx \bar{e}^n/\partial\bar{e}^n$.
3. Sea $f : \partial\bar{e}^n \to e^n$ la inclusión. Demuestra que $e^n \cup_f e^n$ es homeomorfo a S^n.
4. Sea $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, con la la relación $v \sim w$ ssi $w = cv$ para algun $c \in \mathbb{C}^*$. Demuestra que $\mathbb{C}P^n$ es compacto.

   Notas y sugerencias: un espacio topológico es compacto si para cada colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de abiertos en X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Demuestra que la imagen contínua de compacto es compacto, por lo que el cociente de compacto es compacto. Luego demuestra que $\mathbb{C}P^n$ es homeomorfo a una cociente de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ por la relación generada por $v \sim \lambda \mathbf{v}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.
5. Demuestra que $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ (homeomorfismo).

   Sugerencia: considera a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{H}$ (los cuaterniones) y a S^2 como la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3 \cong \operatorname{Im}\mathbb{H} = \{h | \bar{h} = -h\}$ (los cuaterniones imaginarios). Luego fija un $h_0 \in S^2$ y define el mapa $\pi : \mathbb{H}^* \to S^2$ dado por $\pi(q) = qh_0q^{-1}$. Demuestra que este mapa define un homeorfismo $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$.
6. Se define en $\mathbb{C}P^n$ los abiertos $U_i = \{[z_0, \ldots, z_n] | z_i \neq 0\}$, $i = 0, \ldots, n$. Luego se define $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ por $\phi_i([z_0, \ldots, z_n]) = (z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, z_{i+1}/z_i, \ldots z_n/z_i)$. Demuestra que estas coordenadas dan estructura diferencial a $\mathbb{C}P^n$ (es decir, que las funciones de transición $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ son suaves.)
7. Se define una función $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$ por $f([z_0, \ldots, z_n) = \sum_i \lambda_i |z_i|^2 / \sum_i |z_i|^2$, donde $\lambda_0 < \lambda_0 < \ldots < \lambda_n$. Demuestra que f es suave, encuentra sus puntos críticos, decide si son no degenerados y enceuntra sus índices de Morse.