Teoria de Morse, ago-dic 2012.

Tarea num. 6
(Para el viernes, 19 oct, 9:30am)

Sea $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con el producto escalar (estructura riemmaniana) $\|v\|_H = \|v\|/y$, en donde la métrica a la derecha es la métrica euclideana usual, $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1. Calcula la longitud de la curva $\gamma : [0, 1] \to H$, $\gamma(t) = (t, 1)$. (Esto es, la integral $\int_0^1 \|\dot\gamma\|_H dt$.)
2. Parametriza el eje de y (positivo) por longitud de arco (esto es, por una curva γ tal que $\|\dot\gamma\| = 1$.) Usa esta parametrización para encontrar la longitud del segmento vertical entre $(0, a)$ y $(0, b)$.
3. Encuentra los símbolos de Christoffel Γ^i_{jk} de H con respecto a los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.
4. Encuentra los símbolos de Christoffell de H con respecto a los campos vectoriales $y\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}$ (los campos que se obtiene de $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ al aplicarles el proceso de Gram-Schmidt).
5. Encuentra el transporte paralelo $Y(t)$ del vector $Y(0) = (1, 0)$ a lo largo de la curva $\gamma(t) = (t, b)$, $b > 0$.
6. Demuestra que toda tranformación de Möbius $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc > 0$, define una isometría de H.

   (Nota: se puede hacerlo directamente o se puede demostrar primero que cada tal trasformación es una composición de $z \mapsto az$, $a > 0$ (dilatación), $z \mapsto z + b$ (translación) y $z \mapsto -1/z$ (invesrión), y luego demostrarlo para cada una de estas transformaciones).
7. Encuentra una isometría de H no incluida en las del inciso anterior. (Sugerencia: $z \mapsto -\bar z$).
8. Usa las isometrías de los dos incisos anteriores para encontrar a todas las geodésicas en H.

   (Sugerencia: usa el resultado de la clase, que si el conjunto de puntos fijos de una isometría es una curva, entonces esta curva es automáticamente una godésica (no parametrizada). Luego, el conjunto de puntos fijos de $z \mapsto -\bar z$ es el eje de y, por lo que es un geodésica. Luego usa $z \mapsto 1/\bar z$ para encontrar la geodésica que pasa por i en la dirección horizonal. Luego aplica translaciones y dilataciones a estas dos geodésicas para encontrar a todas. No se te olvida encontrar la paramerización por longitud de arco de estas curvas).
9. Encuentr el círculo en H de radio 1 centrado en $(0, 1)$. (Sugerencia: es un círculo euclideano, pero cuyo centro no está en $(0, 1)$. Puedes obtener este círculo como una orbita de las isometrías de H que fijan al $(0, 1)$. Otra manera: usar el problema 12. Los círculos en D con centro en el origen son cícrculos euclideanos con centro en el origen. Luego usas una isometría apropiada $D \cong H$).
10. Usa las geodésicas de H para encontrar la distancia entre $(0, 1)$ y $(0, 2)$ (la distancia entre dos puntos en una variedad riemanniana conexa es la longitud de la curva más corta que los conecta, o el inf de las longitudes, si no existe tal curva). Compara con el problema 1.
11. Demuestra que por cualquer dos puntos en H pasa una gedésica única.
12. Encuentra una isometría entre H y el hiperboloide $\mathcal{H}_R = \{x^2 + y^2 - t^2 = R, t > 0\}$ en $\mathbb{R}^3$, para algun $R < 0$, equipado con la métrica inducida por la métrica de Minkowski, $\|(a, b, c)\|^2_M = a^2 + b^2 - c^2$.

    Sugerencia: Primero encuentra una isometría entre H y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \|(x, y)\| < 1\}$, con la métrica $\|v\|_D = \|v\|/(1 - x^2 - y^2)$. Esto lo haces mediante una transformación de Möbius, por ejemplo $z \mapsto (iz + 1)/(iz - 1)$. Luego mandas el D isométricamente a $\mathcal{H}_R$ mediante la "proyección steregoráfica" $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$, donde $\phi(x, y)$ es la intersección de la recta que pasa por $(0, 0, -1)$ y $(x, y, 0)$ con $\mathcal{H}_R$.