Cálculo Integral para bachillerato, CIMAT, ene-jun 2013

Tarea núm. 5

(para el jueves 28 feb)

Repaso de polinomios y funciones cuadráticas:

- **Definiciones**. Un *polinomio cuadrático* es una expresión de la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son constantes (números reales) y $a \neq 0$. Una *raíz* de $p(x)$ es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Una *factorización* de $p(x)$ consiste en escribirlo como un producto de dos polinomios lineales (los factores), $p(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)$, donde a_1, b_1, a_2, b_2 son constantes (números reales) y $a_1, a_2 \neq 0$. La *discriminante* de $p(x)$ es el número $\Delta = b^2 - 4ac$.
- **Raíces.** Un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ puede tener $0, 1$, o 2 raíces. Esto se determina segun la discriminante Δ: si $\Delta > 0$ $p(x)$ tiene 2 raices $(-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$, si $\Delta = 0$ $p(x)$ tiene una sola raíz $-b/2a$ y si $\Delta < 0$ $p(x)$ no tiene raices.
- **Factorización.** Un polinomio cuadrático $p(x)$ se factoriza justo cuando tiene raices: si r es una raíz entonces $x - r$ es un factor; si $a_1x + b_1$ es un factor de $p(x)$ entonces $r = -b_1/a_1$ es una raíz de $p(x)$.
- **Funciones cuadráticas y sus gráficas.** Una función cuadrática es una función de la forma $y = p(x)$, donde $p(x)$ es un polinomio cuadrático. La gráfica de una función cuadrática es una parábola, con eje vertical. El vértice es un mínimo (la parabola se abre "hacia arriba"') si $a > 0$ y es un máximo si $a < 0$ (se abre "hacia abajo"). Los puntos de intersección de la gráfica con el eje de x corresponden a las raíces del polinomio. Así que la gráfica de $y = p(x)$ intersecta el eje de x en 0,1 o 2 puntos segun si la descriminante de $p(x)$ es negativa, cero o positiva (resp.).

Problemas

1. Para cada uno de los siguientes polinomios cuadráticos $p(x)$: (i) encuentra su discriminante Δ; (ii) decide cuántas raíces tiene (0, 1, o 2); (iii) encuentra las raíces (si existen); (iv) factoriza el polinomio (si es posible); (v) encuentra el vértice de la parábola $y = p(x)$ (sugerencia: es un punto (x_0, y_0) en donde $y'(x_0) = 0$); (vi) decide si el vértice es un punto mínimo o máximo de la función $y = p(x)$ (sugerencia: se detrmina por el signo de $y''(x_0)$); (vi) encuentra los puntos de intersección de la gráfica de $y = p(x)$ con los ejes de coordenadas; (vii) dibuja la gráfica de $y = p(x)$.
   (a) $x^2 + 2$ (b) $x^2 - 4$ (c) $x^2 - 2x + 1$ (d) $x^2 - 2x - 8$ (e) $-2x^2 + 3x + 1$
   (f) $(2x + 3)(4x - 5)$ (g) $(2x + 3)^2$ (h) $(x + 1)^2 + 2$.
2. Cierto o falso:
   a) Si $p(x) = ax^2 + bx$ entonces $p(x)$ se factoriza.
   b) (Opcional) Si dos polinomios cuadráticos $p(x), q(x)$ tienen las mismas 2 raíces entonces son iguales, $p(x) = q(x)$.
   c) (Opcional) r es una raíz de un polinomio $p(x)$ si $x - r$ divide el polinomio $p(x)$ (es decir, al dividir $p(x)$ entre $x - r$ nos da un resíduo 0).
3. Encuentra un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que
   a) tiene dos raices, $r_1 = 2$ y $r_2 = -3$.
   b) tiene una sola raíz, $r = -3/2$, y a, b, c son números enteros;

c) la gráfica de $y = p(x)$ toca el eje de x en un solo punto, con $x = -1$;
d) la gráfica de $y = p(x)$ pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$;
e) la gráfica de $y = p(x)$ pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$.

Nota: algunos de los incisos tienen mas que una solución. Encuentra todas.

4. Encuentra todos los valores del número real α tal que $p(x) = x^2 + \alpha x + 1$
   a) no tiene raíces;
   b) tiene una sola raíz;
   c) tiene dos raices;
   d) no se puede factorizar;
   e) es el cuadrado de un factor lineal;
   f) la gráfica de $y = p(x)$ no toca el eje de x.
   g) la gráfica de $y = p(x)$ pasa por el origen $(0, 0)$;
   h) la gráfica de $y = p(x)$ intersecta la recta $y = 1$ en dos puntos distintos;
   i) (reto) el eje de x corta la gráfica de $y = p(x)$ en dos puntos tal que el área que queda abajo del eje de x es 1.