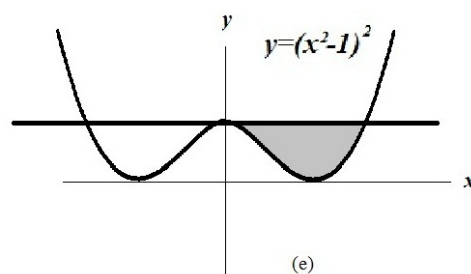
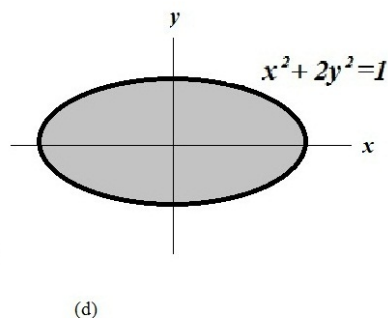
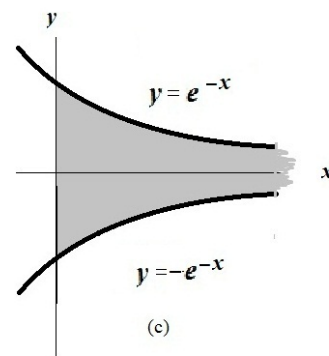
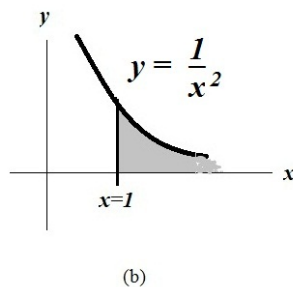
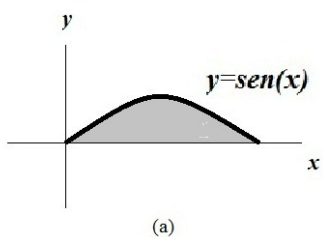


Tarea núm. 6

(para el jueves 7 mar)

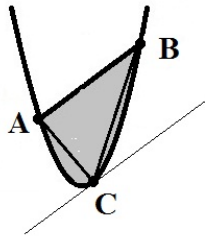
1. En cada uno de los dibujos siguientes, hay que calcular el área de la figura sombreada.



Sugerencias: en (b) la figura sombreada tiene una extensión *infinita* (se extiende hacia la derecha indefinitivamente); sin embargo, su área es *finita*! Para ver esto, calcula el área atrapada abajo de la curva entre $x = 1$ y $x = a$, luego en la expresión que obtienes observa qué pasa cuando a tiende al infinito. En (c) es el mismo fenómeno.

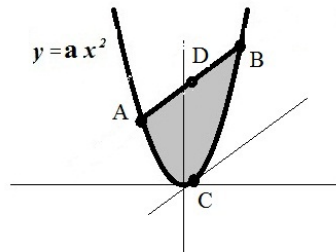
En (d), calcula la intersección de la elipse con el eje de x , luego expresa a y como una función de x en la parte superior de la elipse, e integra la función que obtienes entre los puntos de intersección con el eje de x . Usa la sustitución $x = \text{sen } \theta$.

2. En este problema demostramos un teorema de Arquímedes (287-212 A.C.), llamado la *cuadratura de la parábola*. El resultado es el siguiente: en una parábola trazamos una cuerda (AB en el dibujo). La figura formada por la cuerda y el arco de la parábola se llama un *segmento parabólico* (es el área sombreada en el dibujo abajo). El teorema de Archimedes afirma que *el área del segmento parabólico es $4/3$ veces el área del triángulo más grande inscrito (contenido) en el segmento parabólico* (el triángulo ABC en el dibujo abajo).



- a) Demuestra el resultado para el segmento parabólico entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$
 b) Demuestra el resultado para el segmento parabólico entre la parábola $y = ax^2$ y la recta $y = b$, con $a, b > 0$.

Ahora vamos al caso general. La parábola está dada por $y = ax^2$, $a > 0$, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$.



- c) Encuentra la pendiente m de la recta que pasa por A, B .
 (Resp.: $m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$.)
 d) Encuentra un punto $C = (x_C, y_C)$ sobre la parábola tal que el triángulo ABC tenga el máximo área.

Sugenerencia: el punto C tiene que ser lo más lejos posible del segmento AB . Esto implica que la recta que pasa por C y paralela a AB tiene que ser tangente a la parábola en C . Así que C es un punto en la parábola donde la pendiente de la tangente - es decir la derivada- es la m que encontraste en el inciso anterior).

(Resp. $x_C = (x_A + x_B)/2$, $y_C = ax_A^2$.)

- e) Calcula el área del triángulo ABC .
 (Resp: $(x_B - x_A)(y_D - y_C)/2$, donde $D = (x_D, y_D)$ es el punto medio de AB .)
 f) Calcula el área del segmento parabólico con una integral definida, y checa que la respuesta es $4/3$ veces la respuesta del inciso anterior.