sign $[\theta(\beta) - \theta(\alpha)]$ si $\pi/2 + 2n\pi$ está entre $\theta(\alpha)$ y $\theta(\beta)$; de lo contrario, es $\sigma_n - \tau_n = 0$.

En consecuencia, μ es igual al número de valores de la forma $\pi/2 + 2n\pi$, con un n entero que está entre $\theta(\alpha)$ y $\theta(\beta)$, tomado con el signo de $\theta(\beta) - \theta(\alpha)$; o sea, μ es igual a ν.

Puesto que $\theta = \arctan[(y-\eta)/(x-\xi)]$, se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{y}(x-\xi) - \dot{x}(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

Esto conduce a la siguiente representación integral para el índice de la curva C cerrada, orientada, con respecto al punto (ξ, η):

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\dot{y}(x-\xi) - \dot{x}(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,dt,$$

que puede escribirse en forma simple (ver pp. 384-385) sin referencia explícita al parámetro t, como

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{(x-\xi)\,dy - (y-\eta)\,dx}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

La característica notable de estos resultados es que el entero μ, o el ν, que describe una relación topológica entre el punto Q y la curva C, puede determinarse analíticamente a partir de la representación paramétrica de C, evaluando una integral.

PROBLEMAS

SECCION 4.1*c*, página 328

1. Bosquejar la hipocicloide para $a = 4c$ (astroide) y encontrar su ecuación no paramétrica.

2. Demostrar que si c/a es racional la hipocicloide general se cierra después de que el círculo móvil ha girado un número entero de veces, en tanto que si c/a es irracional la curva encuentra a la circunferencia del círculo fijo en una infinidad de puntos y nunca se cierra.

3. Obtener la representación paramétrica

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \qquad y = a - b\cos t$$

para la trocoide ordinaria, esto es, para la trayectoria de un punto P sujeto a un disco de radio a que rueda a lo largo de una recta, siendo b la distancia de P al centro del disco (ver Fig. 4.7).

4. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva $x^3 + y^3 = 3axy$ (la hoja de Descartes), escogiendo como parámetro t la tangente del ángulo entre el eje x y el rayo que va del origen al punto (x, y).

SECCION 4.1*e*, página 361

1. El ángulo α entre dos curvas en un punto de intersección se define como el ángulo entre sus tangentes en ese punto. Encontrar una fórmula para $\cos\alpha$ en términos de las representaciones paramétricas de las curvas.

2. Sean $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Encontrar fórmulas para d^2y/dx^2 y d^3y/dx^3 en términos de las derivadas con respecto al parámetro t.

3. Encontrar la fórmula en coordenadas polares para el ángulo α entre dos curvas $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$.

4. Encontrar las ecuaciones de las curvas que en todas partes se intersectan bajo el mismo ángulo α con las rectas que pasan por el origen.

5. Demostrar lo siguiente: si $x = f(t)$ e $y = g(t)$ son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b), con $x'^2 + y'^2 > 0$, entonces existe al menos un punto sobre el arco abierto

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad (a < t < b),$$

en que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos extremos.

6. Sea P el punto de un círculo que describe una cicloide conforme el círculo rueda sobre una recta dada. Sea, además, Q el punto de contacto del círculo con la recta. Demostrar que en cualquier instante la normal a la cicloide en P pasa por Q. ¿Qué propiedad análoga se tiene para la tangente en P?

7. Probar que la longitud del segmento de la tangente a la astroide

$$x = 4c \cos^3 \theta, \qquad y = 4c \operatorname{sen}^3 \theta,$$

cortado por los ejes de coordenadas es constante.

*8. Demostrar que las dos familias de elipses e hipérbolas, $(0 < a < b)$,

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1, \quad \text{para } 0 < \lambda < a,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \tau^2} + \frac{y^2}{b^2 - \tau^2} = 1, \quad \text{para } a < \tau < b,$$

son cofocales (esto es, tienen los mismos focos) y se intersectan a ángulos rectos.

9. (*a*) Demostrar que para la elipse el ángulo entre los dos rayos que van de cada foco a un punto sobre la curva es bisectado por la normal en ese punto.

(*b*) Demostrar que para la hipérbola ese ángulo es bisectado por la tangente.

SECCION 4.1*f*, página 366

1. Probar que la curva definida por

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene longitud finita, pero que la curva continua definida por

$$y = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no es rectificable.

2. Probar que si la función f está definida y es monótona en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el arco definido por

$$y = f(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

es rectificable.

SECCION 4.1*g*, página 370

1. Una *integral elíptica de segunda clase* tiene la forma

$$\int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta}.$$

(*a*) Demostrar que la longitud de arco de la elipse $x = a \cos \theta$, $y = b \operatorname{sen} \theta$ puede expresarse en términos de una integral elíptica de segunda clase,

(*b*) Hacer lo mismo para lo trocoide

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \qquad y = a - b \cos t.$$

*(*c*) Demostrar que la longitud de arco de la hipérbola puede expresarse en términos de integrales elípticas de primera y segunda clases.

SECCION 4.1*h*, página 372

1. Sea P un punto del círculo que al rodar genera una cicloide, y sea Q el punto más bajo de dicho círculo en cualquier instante dado.

Demostrar que Q bisecta el segmento que une a P con el centro de la circunferencia osculatriz de la cicloide en P.

2. Encuéntrese el centro de curvatura para $y = x^2$ cuando $x = 0$. Determinar el punto de intersección de las normales a la curva para $x = 0$ y $x = \varepsilon$. Calcular la distancia de la intersección al centro de curvatura. Sugerir una definición alternativa para el centro de curvatura. Demostrar que esta definición es equivalente a la definición dada en el texto.

3. Considérese la cuestión de si la circunferencia osculatriz cruza la curva en el punto de contacto.

***4.** Demostrar que la circunferencia de curvatura de la curva C en un punto P es el límite de las circunferencias que pasan por los tres puntos P, P_1, P_2, conforme P_1 y P_2 se acercan a P.

5. Sea $r = f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares. Probar que la curvatura está dada por la fórmula

$$k = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}},$$

donde

$$r' = \frac{df}{d\theta}, \qquad r'' = \frac{d^2 f}{d\theta^2}.$$

6. La curva para la cual el segmento de tangente definido por el punto de contacto y la intersección con el eje y tiene longitud siempre igual a 1, se llama *tractriz.* Encontrar su ecuación. Demostrar que el radio de curvatura en cualquier punto de la curva es inversamente proporcional a la longitud del segmento de normal definido por el punto sobre la curva y la intersección con el eje y. Calcular la longitud de arco de la tractriz y encontrar las ecuaciones paramétricas en términos de la longitud de arco.

7. Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una curva cerrada. Una longitud constante p es medida sobre la normal desde el punto de su intersección con la curva. El extremo de este segmento describe una curva que se llama "curva paralela" a la original. Encontrar el área, la longitud de arco y el radio de curvatura de la "curva paralela".

8. Demostrar que las únicas curvas cuya curvatura es una constante fija k son circunferencias de radio $1/k$.

***9.** Si la curvatura de una curva en el plano xy es una función monótona de la longitud de arco, demostrar que la curva no es cerrada y que no tiene puntos dobles.

SECCION 4.1*i*, página 378

1. Demostrar que la expresión para la curvatura de una curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ no es alterada por una rotación de ejes y tampoco por un cambio de parámetro dado por $t = \phi(\tau)$, donde $\phi'(\tau) > 0$.

SECCION 4.3*d*, página 411

1. Demostrar que si la aceleración es siempre perpendicular a la velocidad, la velocidad (escalar) es constante.

2. El vector velocidad, considerado como un vector de posición, describe una curva conocida como odógrafa. Para una partícula que se mueve sobre una curva cerrada, investigar si la odógrafa de la partícula puede o no ser una recta.

3. Suponiendo que el círculo que rueda se mueve con velocidad constante, encontrar la velocidad y la aceleración del punto P que genera la cicloide.

4. Sea A un punto fijo en el plano y supóngase que el vector aceleración de un punto móvil P está siempre dirigido hacia A y es proporcional a $1/|AP|^2$. Demostrar que la odógrafa es una circunferencia (ver problema 2).

5. Sea A un punto fijo sobre un círculo. Sea P el punto del círculo móvil que se mueve de manera que el vector aceleración apunta hacia A. Probar que la aceleración es proporcional a $|AP|^{-5}$.

SECCION 4.5, página 420

1. Una partícula que se mueve sobre una recta está sujeta a una resistencia que produce una retardación ku^3, donde u es la velocidad y k una constante. Encontrar expresiones para la velocidad (u) y el tiempo (t) en términos de s, la distancia desde la posición inicial, y v_0, la velocidad inicial.

2. Una partícula de masa unitaria se mueve sobre el eje x sujeta a una fuerza $f(x) = -\operatorname{sen} x$.

(*a*) Determinar el movimiento de la partícula si en el tiempo $t = 0$ se encuentra en $x = 0$ y tiene velocidad $v_0 = 2$. Demostrar que cuando $t \to \infty$ la partícula se aproxima a una posición límite, y encontrar esta posición.

(*b*) Si las condiciones son las mismas, excepto que v_0 puede tener cualquier valor, demostrar que para $v_0 > 2$ el punto se mueve hacia una distancia infinita cuando $t \to \infty$, y que para $v_0 < 2$ el punto oscila en torno al origen.

3. Escójase un sistema de ejes con origen en el centro de la Tierra, cuyo radio se denota por R. De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, una partícula de masa unitaria que esté sobre el eje y será atraída por la Tierra con una fuerza $-\mu M/y^2$, donde μ es la "constante gravitacional" y M es la masa terrestre.

(*a*) Determinar el movimiento de la partícula después de que ésta se suelta desde el punto $y_0 (> R)$; esto es, si en el tiempo $t = 0$ está en el punto $y = y_0$ y tiene velocidad $v_0 = 0$.

(*b*) Encontrar la velocidad de la partícula en el momento de su impacto con la Tierra.

(*c*) Usando el resultado de (*b*), calcular la velocidad de una partícula que cae a la Tierra desde el infinito.[1]

***4.** Una partícula en reposo sobre el punto más alto de una circunferencia es ligeramente perturbada y se desliza hacia abajo por acción de la gravedad. ¿En qué punto dejará de moverse sobre la circunferencia?

---

[1] Esta es la misma que la mínima velocidad con la que debería dispararse un proyectil para que dejase la Tierra sin regresar jamás.

***5.** Una partícula de masa m se mueve sobre una elipse $r = k/(1 - e\cos\theta)$. La fuerza sobre la partícula es cm/r^2, dirigida hacia el origen. Describir el movimiento de la partícula, encontrar su período y demostrar que el radio vector de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales ("Ley de las Areas", de Kepler, para el movimiento planetario).

SECCION 4A.1, página 442

1. Demostrar que la evoluta de una epicicloide (ejemplo, p. 348) es otra epicicloide similar a la original que puede obtenerse de ésta por rotación y contracción.

2. Demostrar que la evoluta de una hipocicloide (ejemplo, p. 348) es otra hipocicloide que puede obtenerse de la primera por rotación y dilatación.